LES PRATIQUES DE L'ÉDUCATION / COLLÈGE

Armelle Géninet

MATHÉMATIQUES
5e/4e

Préface de Antoine de La Garanderie

GESTION
MENTALE
APPLIQUÉE

NATHAN
pédagogie

LES PRATIQUES DE L'ÉDUCATION / COLLÈGE

Série Gestion mentale appliquée, dirigée par Michèle Verneyre

Martine - Antoine

Armelle Géninet

MATHÉMATIQUES 5e/4e

GESTION MENTALE APPLIQUÉE

Préface
de Antoine de La Garanderie

NATHAN
pédagogie

Autres publications de l'auteur

La Gestion mentale en mathématiques, Retz, Paris, 1993.
Épistémologie et Gestion mentale, in : Actes du colloque international de Gestion mentale, Nathan, Paris, 1996.

La Gestion mentale à l'école, collectif, dirigé par Christiane Pébrel, Retz, Paris, 1993.

Mathématiques 6^e, Collection Pratiques de l'Éducation, série Gestion mentale appliquée, Nathan, 1998.

Remerciements

À Gérard pour son soutien de chaque instant.

À France PAGÈS, Christiane PÉBREL et Françoise ROUGEAU pour leur confiance et leurs encouragements.

À mes filles Rozenn et Katell,

À mon fils Ronan et à Marie qui ont tous les deux pris le chemin de ce merveilleux métier d'enseignant.

Préface

Beaucoup d'élèves décrochent en mathématiques au cours des années de 5^e et 4^e.

Après avoir lu ce livre d'Armelle Géninet, on ne peut plus ignorer pourquoi. On apprend, de plus, ce qu'il convient de faire pour éviter cette échéance.

Le grand mérite d'Armelle Géninet est de ne rien laisser au hasard. Elle décortique avec une précision lumineuse les causes des échecs, les modalités opératoires que l'élève doit mettre en œuvre pour les éviter, et celles qu'il devra pratiquer pour aller au succès et le maîtriser.

Comprendre la raison d'une formule, la rationalité d'une démarche, la logique d'une figure relèvent sans doute de l'exécution d'opérations mentales complexes. Mais elles n'échappent pas pour autant au discernement du pédagogue averti, qui sait qu'il doit les *décrire* minutieusement pour, ensuite, en instruire ses élèves, afin que tous sachent, enfin, ce qu'ils ont à faire.

Armelle Géninet unit dans un seul acte l'enseignement de la discipline et le renseignement des moyens pour l'acquérir, en restant toujours dans un parfait équilibre.

N'est-ce pas là réaliser le rêve de l'enseignant?

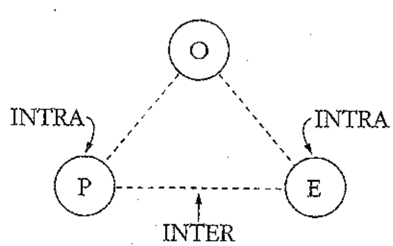
Antoine de La Garanderie

Introduction

Dans la situation pédagogique, il y a l'élève et **sa** gestion mentale, le professeur et **sa** gestion mentale et le concept avec sa nature et sa structure épistémologiques. L'analyse proposée par la Gestion mentale nous permet de porter un autre regard sur un apprentissage et nous offre la possibilité de créer des outils didactiques en tenant compte de tous ces éléments et de juger de leur pertinence.
Les différents courants pédagogiques s'accordent actuellement pour dire que les difficultés d'apprentissage tiennent moins aux trois pôles du «triangle pédagogique» (Élève, Professeur et Objet d'enseignement) qu'aux interactions entre eux. Cette analyse «*inter*» resterait sinon superficielle, du moins largement insuffisante, si on ne la faisait précéder d'une observation minutieuse, «phénoménologique», de chacun des trois acteurs de la situation didactique.

Apport de la Gestion mentale

En levant le voile sur ce qui se passe dans la tête de l'élève en situation d'apprentissage, la Gestion mentale nous donne les moyens d'une analyse «*intra*» tout à fait intéressante et originale. Elle décrit précisément les «lois de la vie mentale».
Elle nous fait découvrir que chacun, élève et enseignant, a **ses** habitudes évocatives, **ses** structures personnelles de projets de sens.
Il convient donc que l'enseignant entreprenne un travail de découverte de son fonctionnement mental et qu'il s'instruise, au sein de formations sérieuses*, de tous les autres possibles dans la tête de ses élèves. Il prendra alors très rapidement conscience de l'influence de ses habitudes mentales sur sa pratique pédagogique et sera alerté sur un risque évident : celui de chercher implicitement à induire chez ses élèves ses stratégies personnelles d'apprentissage. Même averti de ce risque, il devra rester vigilant tant il est vrai que les difficultés inhérentes aux relations «enseignant-élève» dépassent largement l'aspect relationnel, elles tiennent à des **différences de structures mentales**.



O : Objet
P : Professeur
E : Élève

Il est indispensable d'analyser l'«*intra*» **P** (et **E**)
avant de se pencher sur l'«*inter*» P ⟷ E

(*) Organisées et animées par des «formateurs en Gestion mentale».

Nouvelle approche didactique

L'immense apport des didactiques permet actuellement aux enseignants une réelle prise de recul par rapport à leurs séquences d'enseignement. Ils réfléchissent de plus en plus sur la pertinence des outils didactiques qu'ils utilisent pour la présentation d'un concept. La pédagogie par objectifs leur a montré l'importance de clarifier leurs objectifs d'évaluation en termes de «Savoir» et de «Savoir-faire». Même si les moyens pour atteindre ces objectifs ne sont pas clairement définis, c'est un début d'évolution des mentalités.

Il est une dimension de la recherche encore trop peu développée, elle est signalée avec force par Dupin et Joshua, comme par G. Vergnaud ou R. Brissiaud dans la didactique des sciences. Faisant en particulier référence aux travaux de Vygotsky, ils signalent l'importance d'une analyse épistémologique des objets d'enseignement : analyse «*intra*» des choix historiques, des outils didactiques comme des supports.

Ici encore la Gestion mentale permet l'accès à une dimension supérieure : **quelles sont les structures épistémologiques de ces choix, outils, supports, et quelles en sont les incidences sur la Gestion mentale de l'apprenant?**

Qu'est-ce que l'approche de tel concept, aussi bien dans le fond que dans la forme, nécessite en termes de stratégies mentales? Comment peut-on cibler en effet les causes d'échec dans l'apprentissage d'une notion si on ne s'est pas auparavant attaché à décrire précisément les étapes mentales d'une **stratégie de réussite**? Qu'est-ce qui, dans la nature même du concept, peut faire obstacle à la démarche d'un élève? En quoi, par exemple, la nature déductive du raisonnement mathématique ou le choix d'une approche inductive dans l'enseignement actuel des langues constituent-ils des «obstacles épistémologiques» tels que les a définis Vygotsky? Comment la présentation linéaire d'une table de multiplication constitue-t-elle pour beaucoup trop d'élèves un obstacle à leur mémorisation? Quelles sont les adaptations possibles ou les incompatibilités structurelles de leurs habitudes mentales avec ces objets d'étude?

Autant de questions qu'il est intéressant de se poser sous l'éclairage de la Gestion mentale si l'on veut créer des outils didactiques qui soient de véritables «*instruments psychologiques*» c'est-à-dire «*d'aide au développement de l'intelligence des élèves*».

Analyse épistémologique d'une situation d'apprentissage

Le travail qui va suivre est un exemple d'analyse d'une situation didactique sous l'éclairage de la Gestion mentale pour mettre en évidence les trois types d'obstacles présents dans chaque apprentissage :

- *obstacles pédagogiques* tenant à la forme de l'approche ou à la nature des supports didactiques utilisés,
- *obstacles épistémologiques* liés à l'objet d'apprentissage, à la nature du concept ou à la structure de la tâche et leurs incidences sur l'activité mentale de l'apprenant,
- mais aussi *obstacles mentaux (ontogéniques)* inhérents à la structuration de la pensée de l'élève et à son adéquation avec la situation d'apprentissage.

L'exemple a été volontairement choisi hors des préoccupations du collège pour faciliter l'accueil de la démarche et intéresser au questionnement. Les tables de multiplication font partie des acquisitions de base des mathématiques à l'école, mais le professeur de mathématiques de collège, étonné, ne peut que constater leur non-maîtrise.

Après des semaines, des mois, des années d'effort, beaucoup (trop) d'élèves entrant en collège, même s'ils savent à peu près réciter leurs «tables», hésitent, ânonnent, se trompent quand ils doivent les utiliser en calcul. Comment ne pas se révolter devant tant d'énergie gaspillée par les enfants, leurs parents et bien sûr leurs enseignants? En quoi cet apprentissage est-il si difficile pour des enfants capables d'apprendre par ailleurs, sans trop de mal, de longues poésies? Comment faire pour *remédier*, mais surtout pour *prévenir* ces échecs?

Dans cet objectif, il était nécessaire de décrire précisément cette activité de mémorisation, d'en analyser les difficultés sous plusieurs angles : celui de l'activité elle-même, celui du contexte mathématique et de la présentation de l'enseignant et bien sûr celui du cheminement mental de l'élève. Il convenait ensuite de s'interroger sur les choix didactiques et de rechercher des outils qui donnent un maximum de chances à un plus grand nombre d'élèves tout en préservant la notion de plaisir dans l'apprentissage.

Les tables de multiplication

Traditionnellement, depuis des générations, l'enseignant demande à l'élève de pouvoir réciter oralement, par cœur, **la totalité** d'une table, présentée comme encore au dos des cahiers de brouillon :

6 x 1 = 6
6 x 2 = 12
...
...
6 x 10 = 60

Cet objet mathématique est **linéaire**, il suit le sens de la lecture, de l'écriture, le sens de la page.
Il contient trois colonnes : la première est monotone, la deuxième est connue, c'est la liste des 10 premiers entiers non nuls. Une seule est originale, celle de droite, construite par des additions successives : l'ajout de 6.

Face à cet objet mathématique on constate deux formes de traitement mental. Une grande majorité d'apprenants, élèves en classes, adultes en formation, va se l'approprier dans une **stratégie verticale** consistant à éliminer les deux colonnes de gauche pour porter tout le travail mental sur la colonne de droite. En effet, face à ce flot d'informations, trente pour chaque «table», tout le travail intellectuel va se structurer autour d'un projet mental dominant : **réduire le nombre d'informations** à stocker. Pour ce faire, la priorité va tout naturellement aller vers les éléments changeants, colonne de droite, délaissant par le fait même l'élément constant, colonne de gauche et les éléments connus, colonne du milieu. D'ailleurs beaucoup de jeunes élèves le disent : «Je ne retiens que les résultats!»

La saisie de ces nombres va se faire linéairement, dans l'ordre où ils sont écrits, de haut en bas. L'élève va accrocher les nombres l'un à l'autre. Il passera du premier au second par l'ajout de 6. Il se crée une chaîne de nombres. Il aura donc sa table de multiplication dans la **successivité** des nombres de droite. Il s'est constitué un objet mental à structure linéaire. Ne nous étonnons pas alors que pour trouver le résultat de «6 x 7», il soit obligé de remonter au début de la chaîne 6 x 1 = 6, 6 x 2 = 12,... Il s'est constitué une ligne insécable.

Dans la «comptine numérique» que récite l'élève, tous les «mots nombres» n'ont pas la même prégnance.

D'ailleurs certains élèves sont parfois arrêtés dans leur récitation : «6 fois 7 quarante deux, 6 fois... je suis arrivé où déjà?...» Cette interrogation prouve s'il en était encore besoin que même si tous les nombres sont récités : 6, 7 et 42, tous ne sont pas évoqués! Seul 42 est vraiment présent dans la conscience. Il permet de donner le nombre suivant dans la colonne de droite 48 (42 + 6) mais n'est pas véritablement mis en relation avec le 6 et le 7.

Certains apprenants, enfants, adultes – beaucoup moins nombreux – vont utiliser une **stratégie «horizontale»** installant dans cette table dix séquences qu'ils vont saisir plus ou moins indépendamment les unes des autres.

La séquence 6 x 7 = 42 peut alors être saisie visuellement (l'élève revoit l'étiquette des 3 nombres dans sa tête) ou auditivement (il entend ou se redit mentalement : «six fois sept quarante-deux»). Il a alors les trois nombres en **simultanéité**. Elle est évidente dans le cas d'une image mentale visuelle qui, par sa structure spatiale globale, contient toutes les informations *en même temps*. Elle l'est un peu moins dans le cas d'une image mentale auditive. Dans le premier cas, l'élève pourra très rapidement intervertir 6 et 7; dans le second pour donner 7 x 6, très souvent il reprendra 6 x 7.

L'un des deux produits lui sera plus familier «à l'oreille», son image mentale auditive lui donnant les trois informations dans un ordre établi plus difficile à bousculer.

Simultanéité et **successivité** sont deux formes de saisie mentale ; chacun d'entre nous ne manipule pas aussi aisément l'une que l'autre.

10 sous-ensembles	$\boxed{6 \times 5 = 30}$
10 espaces horizontaux	$\boxed{6 \times 6 = 36}$
indépendants les uns des autres	$\boxed{6 \times 7 = 42}$

Dans ces espaces, chaque nombre est important, tous les trois ont la même prégnance, ils sont à égalité d'importance dans l'effort de mémorisation!
Dans cet «apprentissage horizontal», les 30 informations sont rétablies par groupes de 3. Chaque groupe de 3 nombres doit devenir une entité globale indépendante des autres groupes de 3 nombres.

Cette globalisation sera :
- **spatiale**, dans une **image mentale visuelle** pour les uns ;
- **temporelle**, par l'appui sur le **son** et la création d'une «phrase numérique» pour les autres ;
- **spatio-temporelle** ou **temporo-spatiale** par un mixage des deux pour un grand nombre d'élèves.

Il faut remarquer que les 10 globalités (c'est beaucoup d'éléments pour une seule table, multipliés par le nombre de tables) ne seront pas toujours codées de la même manière, l'élève mémorisera certaines d'entre elles qui lui sembleront plus faciles et qui lui serviront de référence et retrouvera les autres à partir de ces globalités référentes. Par exemple :

$6 \times 4 = 24$
$6 \times 8 = 48$ double

C'est encore une façon *inconsciente* de réduire le stock des informations à enregistrer : j'en retiens quelques-unes par cœur et je sais que je saurai retrouver les autres à partir de celles-là, qui ne seront donc plus à mémoriser «dans l'état» : *je n'encombre pas ma mémoire!*

Pour globaliser à l'horizontale, l'apprentissage des tables de multiplication nécessite le passage par des

Évocations

visuelles	auditives
$\boxed{6 \times 7 = 42}$	«six fois sept quarante-deux»
(globalité spatiale dans l'image)	(globalité temporelle dans la «phrase»)

L'enseignant qui fait apprendre par cœur une table de multiplication a en tête l'utilisation que ses élèves devront en faire en calcul et le leur dit. D'ailleurs, il veille à les interroger dans le désordre. Il doit être conscient qu'il demande alors à la majorité de ses élèves un changement complet de stratégie. La stratégie verticale majoritairement utilisée ne cadre pas avec le projet de restitution dans le désordre.

Même si l'élève sait réciter la table de 6, ce n'est pas pour autant qu'il saura extraire rapidement : $6 \times 7 = 42$! cela suppose en effet un **changement complet de stratégie**. Il faut abandonner le sens construit verticalement, oublier l'enchaînement linéaire du par cœur, redonner au «6» et au «7» la place qu'ils avaient perdue dans l'effort de mémorisation précédente, briser des liens établis dans l'ensemble initial pour créer des «sous-ensembles» autonomes par la création de liens *originaux* (ces liens peuvent être aussi bien spatiaux que temporels), en associant 3 nombres qui ne l'étaient pas nécessairement, donc globaliser à l'horizontale! Ce changement de stratégie représente une très grande difficulté pour beaucoup d'élèves, la première activité ne leur facilite pas la seconde : ils ont fait de la comptine un tout insécable et ils doivent désormais la faire éclater pour la reconstruire autrement. «Nos acquis ont la destinée que nous leur avons donnée.» (A. de la Garanderie)

Difficultés de mémorisation

Beaucoup d'élèves à dominante évocative auditive ne peuvent apprendre les tables de multiplication par cœur, car, croulant sous le flot d'informations auditives à mettre en mémoire (30 par table!), ils continuent à la reconstruire linéairement par des additions successives; ils réduisent la quantité d'informations à une seule : «j'ajoute 6» et continuent, quelquefois même en comptant sur leurs doigts, à se «raconter l'histoire» de la table. Quand on leur demande 6 x 7 =?, ils la reprennent depuis le début : 6 x 1; 6 x 2; etc.

Beaucoup d'élèves à dominante évocative visuelle ne pensent cependant pas à utiliser des évocations visuelles et s'obstinent à apprendre sur le mode auditif : ils se répètent les comptines, calquant leurs évocations sur le mode de restitution, c'est l'échec! Ils n'utilisent pas leur langue maternelle pédagogique (ils seront en difficulté chaque fois qu'il leur faudra apprendre par cœur, jusqu'au jour où, averti de la *loi des évocations*, quelqu'un leur montrera la possible mobilisation de leurs images visuelles).

Dans le choix pédagogique de l'enseignant, il y a plusieurs croyances implicites :
- la mémorisation doit prendre appui sur la compréhension : l'élève apprendra plus facilement quand il aura compris comment sont formés les produits!
- il est nécessaire, ou tout au moins facilitant, de posséder l'ensemble pour avoir accès à un élément!
- si l'élève sait sa table «par cœur», il saura isoler rapidement : 6 x 7 = 42, pour l'utiliser en calcul!

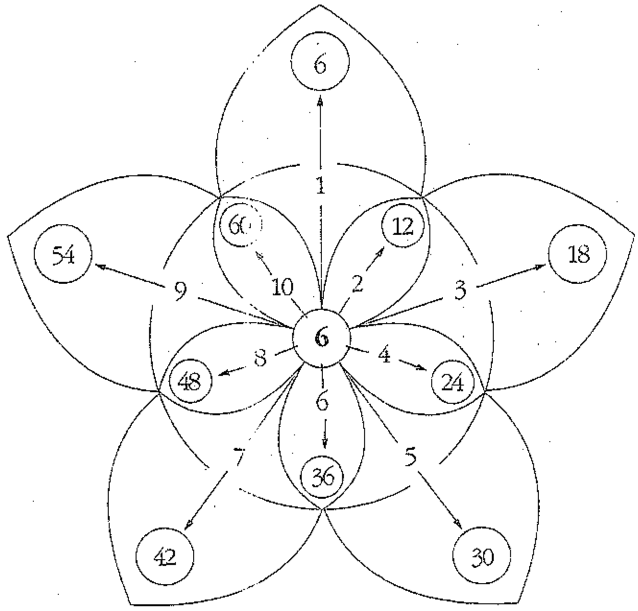
Nous venons de voir à quel point ces implicites sont le signe d'une méconnaissance des lois de fonctionnement mental.

On peut s'interroger sur la pertinence d'un tel choix pédagogique. Certes, il a fait la preuve de son efficacité sur des générations d'élèves, mais il continue à échouer pour beaucoup d'autres. Il faut être conscient que l'exercice de mémorisation par cœur précipite ces élèves dans des stratégies mentales qui peuvent faire obstacle à la suite de leurs apprentissages, puisqu'il les amène à se créer difficilement une globalité qui n'est pas la bonne par rapport à l'utilisation qu'ils auront à en faire en opérations. «L'enseignement purement séquentiel, linéaire, bloque tout enfant à prédominance cérébrale de l'hémisphère droit» (G. Racle, *La Pédagogie interactive*, Retz).

Il ne s'agit pas ici de remettre en question le principe de l'apprentissage par cœur dont chacun sait l'importance, mon propos n'est pas de vouloir substituer l'apprentissage «vertical» à l'apprentissage «horizontal», ce sont deux stratégies de nature différente, elles sont indispensables toutes les deux : la première pour conserver le sens, la seconde pour acquérir rapidité et efficacité. S'il y a erreur, c'est peut-être de penser que la deuxième doive nécessairement découler de la première en imposant le passage de «l'ensemble à l'élément». Pourquoi ne pas les mener en parallèle?

Dans cet objectif, il y a à développer des pratiques différenciées qui permettent à chaque élève de trouver ce qui lui convient et à proposer des supports pédagogiques qui soient une aide au développement mental de chacun, des **instruments psychologiques** tels que les a définis Vygostsky. On tiendra alors compte du fonctionnement des deux hémisphères cérébraux, en particulier de l'hémisphère droit trop oublié dans nos habituelles approches linéaires, en ajoutant à la présentation une dimension visuelle.

J'ai pu tester auprès des élèves en difficulté de mémorisation la pertinence de la présentation d'une table de multiplication en «mandala» comme ci-après :



Le lecteur pourra remarquer que les produits 6, 12, 18... ne se retrouvent pas sur la même ligne, cela pour éviter que l'élève ne retombe dans une «linéarité circulaire». Pour l'avoir régulièrement utilisée en formation d'adultes, je peux affirmer que la disposition en mandala ne provoque pas chez les stagiaires la même activité mentale qu'une disposition linéaire. La disposition linéaire précipite une majorité d'élèves dans une stratégie d'échec parce qu'inadaptée à ce que cherche l'enseignant. La structure spatiale de cette table permet à l'apprenant de diriger son activité mentale dans le sens que souhaite l'enseignant et que nécessite l'utilisation en calcul : la création de sous-globalités.

Il s'agit de mettre la forme de l'outil didactique au service du fond de l'activité mentale. C'est tout le propos d'une très grande partie de cet ouvrage.
L'enseignant peut proposer l'une des tables sous cette forme et faire appel à l'imagination et au sens artistique de ses élèves pour réaliser les autres. Il affichera alors la production du groupe en un immense «bouquet» sur lequel il fera pratiquer très régulièrement la récitation des tables, soit en «linéaire», en tournant autour des mandalas (mais toujours en revenant vers le centre), soit en «éclaté» : produits pairs, produits impairs, au hasard... Il guidera cette récitation silencieusement, en l'accompagnant de mouvements de la main sur le support spatial affiché en classe (mouvements pouvant aller du centre du mandala vers sa périphérie ou l'inverse, mais en passant toujours par son centre pour créer des liens entre les trois nombres). Cette dimension visuelle et kinesthésique complète judicieusement un apprentissage qui n'est que trop souvent verbal. Il peut encore, sur des supports individuels, dire un produit et demander à ses élèves de montrer du doigt l'itinéraire sur le schéma en se disant mentalement le résultat.

Chacune de ces activités sera menée sans précipitation, précédée, rythmée, et suivie par des **temps d'évocation**, c'est-à-dire de stratégie mentale, avec mise en projet précis de revoir mentalement le dessin, le mouvement, ou se redire la phrase numérique. Il faut ici rappeler qu'**une manipulation, quelle qu'elle soit, n'est utile que dans la mesure où elle est évoquée**!
Ce type de présentation a le mérite de rendre attrayant un apprentissage qui, *a priori*, fait souffrir plus qu'il n'enchante. Il fait appel à l'hémisphère droit du cerveau dans une activité qui, par essence, relève plus de l'hémisphère gauche. Il suscite l'intérêt et la créativité dans une matière trop souvent vécue par les élèves (et les enseignants) dans l'impatience, le stress et l'angoisse de l'échec.

Toute activité susceptible de **dédramatiser l'apprentissage**, le rendre agréable à vivre **en lui conservant son sens** est à promouvoir si on veut briser cette spirale infernale «d'échec en maths» dès l'école primaire.

Dès qu'un enseignant s'initie à la Gestion mentale, il est alerté sur l'incidence que son propre fonctionnement mental peut avoir sur sa pratique d'enseignement. Il a dès lors à prendre conscience, de plus en plus finement, de ses habitudes évocatives et de ses structures de projet.

L'analyse qui vient d'être exposée met l'accent sur une autre nécessité dans le cadre d'une recherche didactique et épistémologique, l'enseignant devra se poser deux questions :

- qu'est-ce qui, dans le contenu mathématique, par la structure du concept, peut être inducteur de la Gestion mentale de l'apprenant?
- quand je fais un choix pédagogique, et j'ai des raisons de le faire, qu'est-ce que cela entraîne pour mes élèves, *TOUS mes élèves*. En quoi ce choix peut-il être gênant pour certains d'entre eux et qu'est-ce que je peux proposer d'autre pour que TOUS aient accès à leur «zone proximale de développement[1]» ?

Tout le travail de l'enseignant ira alors dans le sens de la diversification des approches, des présentations et des supports, alternant le linéaire et le global, le verbal et le visuel, le temporel et le spatial. Ce souci permanent ne le dispensera pas d'une extrême vigilance pour repérer suffisamment tôt l'élève en difficulté, mener un dialogue pédagogique de découverte de son activité mentale et l'amener à évoluer dans cette activité.

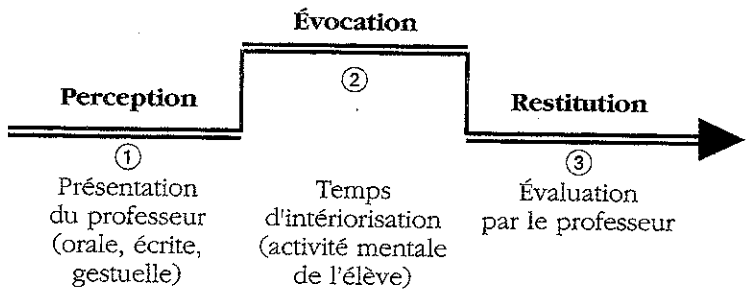
1. Vygostsky.

1 Pour une méthodologie du travail intellectuel

LES TROIS TEMPS DE LA PRATIQUE PÉDAGOGIQUE

Quand le professeur de mathématiques intervient dans une classe, quel que soit le soin apporté à la préparation de son cours, quel que soit son zèle pédagogique devant ses élèves, le plus important lui échappe : ce qui s'est passé dans la tête de ses élèves entre le moment de l'explication et celui de son évaluation orale ou écrite. Son efficacité d'enseignant s'arrête là où commence leur activité mentale.

La pratique pédagogique est à 3 temps :



« Il n'y a pas d'apprentissage sans évocation. » — Antoine de La Garanderie

L'originalité de la Gestion mentale est de fournir à l'enseignant (et donc à ses élèves) les moyens d'observation et d'analyse de cette activité mentale individuelle (étape 2). Le professeur de mathématiques montre à ses élèves ce qu'est une calculatrice et comment l'utiliser, pourquoi ne leur montrerait-il pas ce qu'est l'activité évocative et comment l'utiliser pour mieux réussir en algèbre ou en géométrie. Le préalable indispensable est que l'enseignant soit instruit de la diversité et de la complexité des mécanismes mentaux en situation d'attention, de mémorisation, de réflexion, de compréhension et d'imagination. C'est l'objet d'une formation.

Pour mieux comprendre la nature de cette activité évocative, je propose au lecteur de se livrer à un petit exercice de réflexion désormais classique en formation et de tenter d'observer sa production évocative pour cet exercice fort simple.

> *Exercice : l'avant-veille du lendemain d'aujourd'hui, c'est quel jour?*

Prenez le temps de revenir sur votre activité mentale de résolution et celui de vous observer.

Avertissement : ne tirez pas de conclusion hâtive à partir de vos observations. Il se peut que dans une autre situation, vous auriez fonctionné tout à fait différemment. Ne tentez pas de vous « étiqueter » dans cet exercice isolé.

Pour réaliser cet exercice, vous êtes passé très rapidement par trois étapes mentionnées plus haut :

1. lecture de l'énoncé (ici perception visuelle),
2. activité mentale de saisie et de traitement des éléments de cet énoncé,
3. formulation de la réponse.

Quelle a été la nature de votre activité mentale de saisie puis de résolution de cet exercice? (étape 2). Que s'est-il passé dans votre tête?
Vous pouvez essayer de trouver dans le questionnement qui va suivre ce qui peut correspondre à vos observations mentales.

- Avez-vous traduit cet énoncé en **images mentales visuelles**? Avez-vous vu :
  - une ou des scènes concrètes?
  - une frise chronologique?
  - un schéma horizontal? vertical?
  - des chiffres?
  - autre chose? _
- Vous êtes-vous **parlé mentalement** cet exercice :
  - en vous faisant un commentaire de scènes vécues (ou possibles) par vous ou quelqu'un d'autre?
  - en vous faisant plutôt un discours intérieur sur les mots? (l'avant-veille, c'est avant la veille, etc.);
  - vous êtes-vous dit vous autre chose? _
- Avez-vous traduit l'exercice **à la fois en images et en mots**. Si c'est le cas :
  - quoi en premier?
  - qu'est-ce qui vous en a donné le sens?
  - qu'est-ce qui vous semblait le plus significatif?
- Avez-vous eu besoin d'écrire ou de faire un schéma sur une feuille. Si oui,
  - était-ce pour **revoir ce schéma dans votre tête**?
  - était-ce pour mieux **vous parler mentalement** le raisonnement?
- Peut-être avez-vous eu du mal à vous observer parce que vous avez eu la réponse de manière extrêmement rapide ou parce que vous n'êtes pas habitué à cette introspection. Il est parfois difficile de faire cette observation seul. Si l'athlète a besoin d'un entraîneur, c'est exactement pour la même raison : il a besoin lui aussi d'être accompagné dans le retour en arrière du geste effectué et dans l'analyse de ce geste.

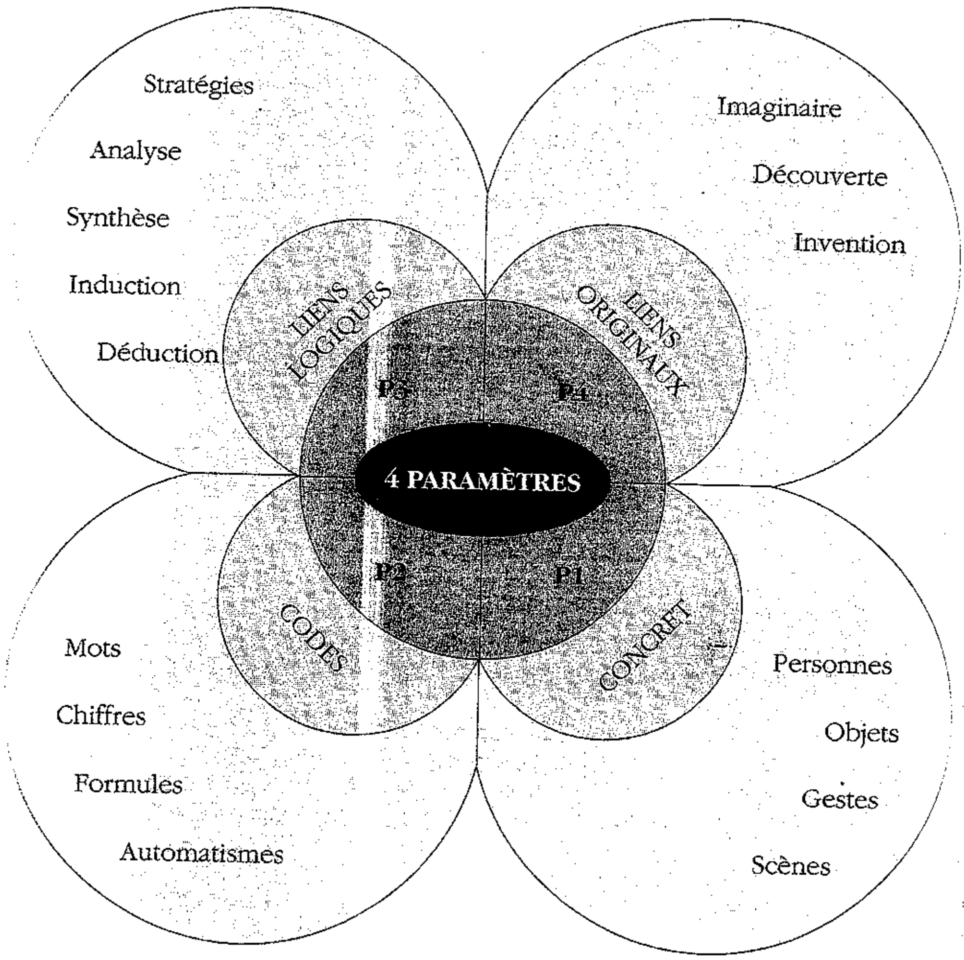
Il faudrait multiplier les observations dans des situations fort différentes pour arriver, par recoupement, à des hypothèses d'une dominante mentale de fonctionnement.
Il est extrêmement difficile de découvrir seul ses habitudes mentales. C'est le rôle du formateur ou du praticien en Gestion mentale. Expert en dialogue pédagogique, maîtrisant les techniques d'accompagnement, de questionnement, de reformulation, disposant de la grille d'analyse théorique, il peut mettre l'élève (ou l'adulte) en contact avec son activité mentale, condition minimale de l'auto-observation, et l'aider à décoder les différentes étapes de son itinéraire mental dans une situation précise.
Questionner des élèves sur ce qui se passe dans leur tête en situation d'activité mathématique permet à l'enseignant de remonter à l'origine des difficultés, de déloger des faux savoirs aussi bien que de repérer les gestes mentaux déficients. Il peut donc mettre en place une pratique pédagogique différenciée qui tienne compte à la fois des niveaux de connaissances et des fonctionnements individuels.

Mais pourquoi donc attendre que des difficultés soient installées. Faire de la remédiation sera toujours nécessaire. **Faire de la prévention** doit être un souci majeur pour chaque enseignant. Le détour par ce qui se passe dans la tête d'un apprenant nous permet actuellement de revoir nos façons de faire et de réinventer nos pratiques didactiques pour faire réussir un plus grand nombre. Puisque la matière première de la pensée est faite d'évocations visuelles, auditives ou verbales, entraînons nos élèves à enrichir leurs évocations pour faire des mathématiques. Puisque nous avons la connais-

sance de ces domaines d'évocation (4 paramètres), accompagnons-les dans la production d'évocations concrètes (**P1**) aussi bien qu'abstraites (**P2**) et donnons-leur l'habitude de créer des liens logiques (**P3**) ou imaginaires (**P4**) (*voir ci-dessous la grille des paramètres*) et d'explorer des domaines évocatifs qui ne leur sont pas familiers.
Le professeur de mathématiques devient alors maître d'apprentissage. Ce nouveau regard sur l'élève l'amène tout naturellement à changer son point de vue sur les mathématiques et sur les outils qu'il utilise.

Si l'outil est inadapté par rapport à l'objectif recherché, il faut en changer. Si une table de multiplication présentée linéairement conduit beaucoup d'élèves à l'échec, présentons-la autrement. Si un dessin global pour un théorème de géométrie est un obstacle à sa mémorisation (voir chapitre 3), inventons un outil qui lève cet obstacle, qui permette de faire éclater cette globalité et amène l'élève à la compréhension du raisonnement déductif. Plutôt que de dire ou laisser dire d'un élève qu'il ne comprend rien en mathématiques, aidons-le à découvrir les étapes difficiles dans le déroulement de son activité intellectuelle.

Antoine de La Garanderie a décrit très précisément cinq gestes mentaux : attention, mémorisation, réflexion, compréhension, imagination, ainsi que leurs conditions de déroulement. Des difficultés de compréhension en mathématiques sont trop hâtivement diagnostiquées. Ce sont aussi souvent des problèmes d'attention ou de mémorisation qu'il faudrait identifier. Je reviendrai plus précisément sur la compréhension dans la deuxième partie. Nous essaierons auparavant de **comprendre les dédales d'un cheminement intellectuel**.



REPÉRAGE DES BLOCAGES POSSIBLES DANS L'ACTIVITÉ INTELLECTUELLE

Pour que l'explication soit plus aisée, voici un nouvel exercice que vous pouvez vous amuser à résoudre tout en observant votre itinéraire mental. Il sera ensuite fait une analyse des solutions habituellement apportées et des stratégies mentales décrites en dialogue pédagogique.

> *Une salle de spectacle peut recevoir 2800 personnes. Lors d'un concert, 4/7 seulement des personnes désirant y assister peuvent trouver une place. On demande combien de personnes sont restées dehors ?*

Plusieurs types de réponses sont apportées à ce problème (régulièrement donné en formation d'adultes) :

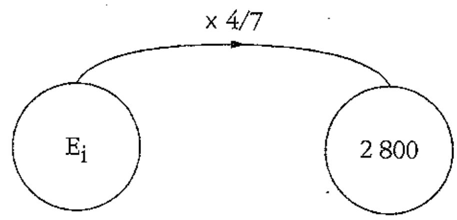
- *Groupe 1* : «Ce n'est pas la peine, je n'y arriverai pas... de toute façon, moi les maths !...»
- *Groupe 2* : «Ce problème n'est pas possible !»,
- *Groupe 3* : «C'est facile : $\frac{2\,800 \times 4}{7} = 1\,600$ personnes
- *Groupe 4* : «Ça y est : 2 100 personnes»

Les trois premières réponses fusent ! La quatrième (bonne réponse) est quelquefois donnée extrêmement rapidement, mais la plupart du temps elle surgit après un temps manifeste de réflexion et d'interrogation.

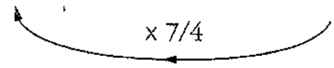
- *Le groupe 1* : celui qui se précipite dans le «je n'y arriverai pas» exprime un tri évocatif dans lequel l'indice le plus prégnant est de toute évidence 4/7. Cet objet évoqué rencontre un évoqué «négatif», souvenir d'échecs à répétition, bien ancré dans le cerveau limbique : l'information ne parvient pas au cortex. Certaines personnes arrivent à trouver le ressort et, canalisant leur réaction affective, retrouvent la maîtrise de leur réflexion. Elles expriment qu'elles sont alors revenues à l'énoncé pour passer en revue tous les indices avant de refaire leur tri.
- *Le groupe 2* : les personnes affirmant très fort que le problème n'est pas possible prennent parfois beaucoup de temps pour accepter de se laisser convaincre. Je me suis quelquefois demandé si j'avais d'ailleurs vraiment convaincu...
  Elles décrivent un cheminement mental polarisé autour d'évocations visuelles ou verbales de.. «des personnes désirant y assister»... et s'enlisent dans «Je ne peux pas savoir combien *désirent*».
  D'autres expliquent qu'elles ont très bien «vu» dans leur tête les personnes à l'intérieur et à l'extérieur de la salle mais, ou bien cette globalité est restée insécable : elles n'ont pas réussi à séparer le dedans, le dehors et extraire l'intérieur de la totalité des personnes ou bien, au contraire, elles les ont vus comme deux espaces de la salle bien séparés : dedans et dehors sans que soit évoquée la globalité. Dans les deux cas elles n'ont pas eu ce vécu mental d'inclusion des 2800 personnes dans l'espace initial des personnes désirant y assister.
- *Le groupe 3* : les personnes disent avoir géré en priorité 4/7 et 2800, faisant ainsi dans l'énoncé le tri des indices à l'allure mathématique, animées qu'elles sont par un projet mental (la plupart du temps implicite) de résoudre le problème en appliquant une stratégie de transformations bien maîtrisée (je divise par 4 puis je multiplie par 7, les 2800 personnes représentant pour elles l'état initial).

La première des difficultés réside dans l'énoncé du problème car il y a inversion de l'état initial (E_i) et de l'état final (E_f) : il faut attendre la fin du texte pour avoir l'état initial, celui sur lequel doit s'appliquer 4/7. Beaucoup de personnes (élèves ou adultes) construisent leurs évoqués dans l'ordre de ce qu'elles entendent ou de ce qu'elles lisent et sont alors décontenancées. Ce n'est qu'à la fin de la phrase qu'il est possible de prendre conscience de l'état initial.

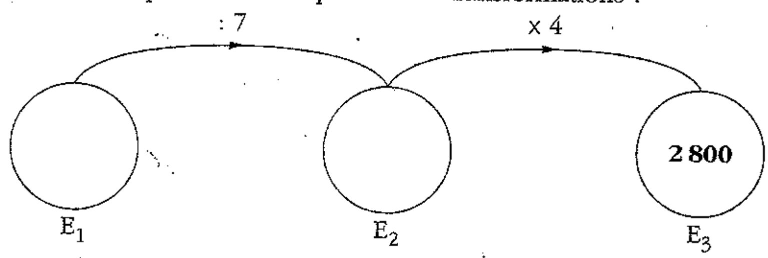
De plus cet E_i n'étant pas connu, il faut effectuer une transformation (opération x 4/7) sur une quantité inconnue.
La transformation et l'état final sont connus, reste à découvrir l'E_i. Il y a alors nécessité d'inverser la transformation (réversibilité). Ce que réussissent les personnes du groupe 4 :



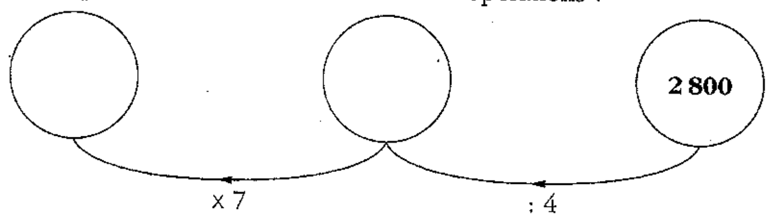
Il faut «défaire» cette opération, cela suppose la compréhension du concept 4/7.



Cette transformation peut se décomposer en 2 transformations :

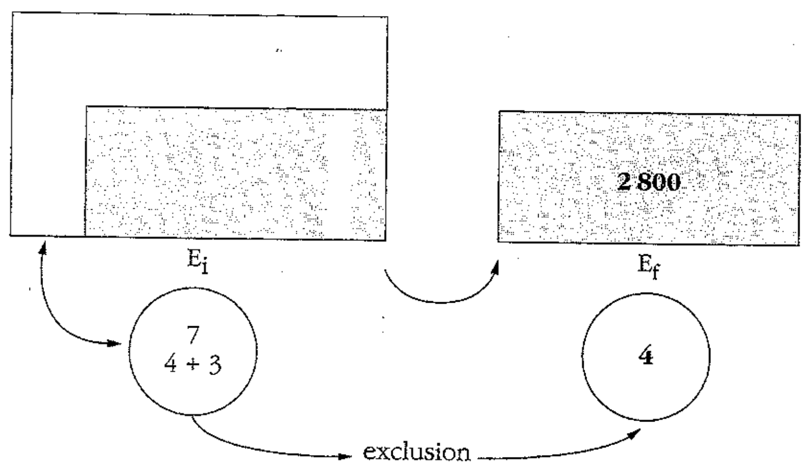


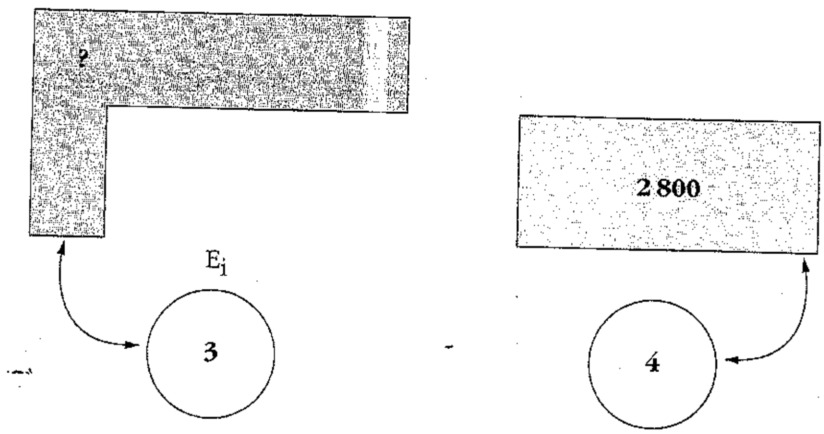
Il devient alors plus facile de défaire la chaîne d'opérations :



Il suffit ensuite d'exclure 2800 de 4900 : 2100 personnes

Une autre stratégie est fréquemment utilisée :

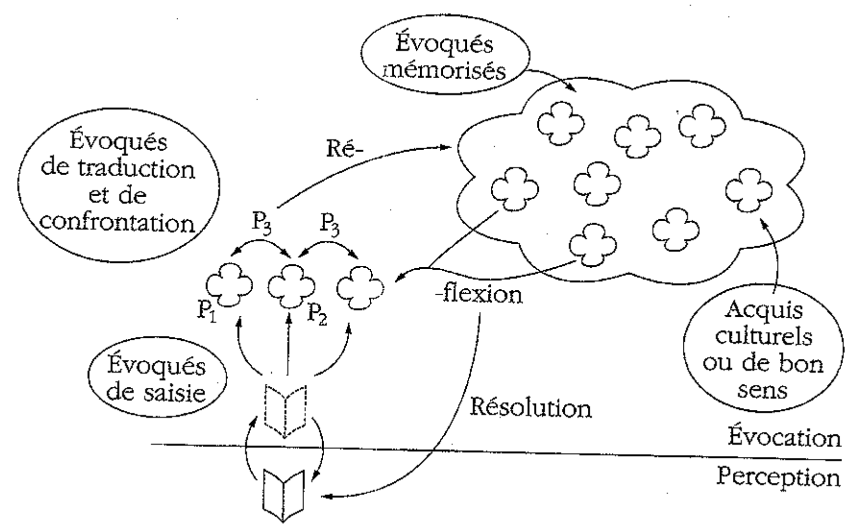




Cette stratégie met en évidence la proportionnalité.

En plus de ces grandes catégories de stratégies on rencontre parfois des nuances surprenantes :
«Le problème n'est pas possible... 4/7, ça n'existe pas»
Question : Ah bon! c'est quoi pour vous 4/7?
Réponse : rien!
Q : Si je vous dis 3/4, qu'est-ce qui se passe pour vous?
R : je me dis 3/4 d'heure
Q : Est-ce que vous auriez autre chose?
R : Je peux voir une pizza coupée en 4 dont il manque 1 morceau.
Q : et maintenant, 4/7 d'une pizza ce serait quoi?
R : ce n'est pas possible, je ne peux pas couper en 7 (*sic*). Ça n'existe pas.
Beaucoup d'élèves ont une compréhension de la fraction uniquement ancrée dans le concret. Il est certain que la réussite de ce problème suppose la maîtrise du concept 4/7. 4/7 est un nombre à écriture décimale illimitée.

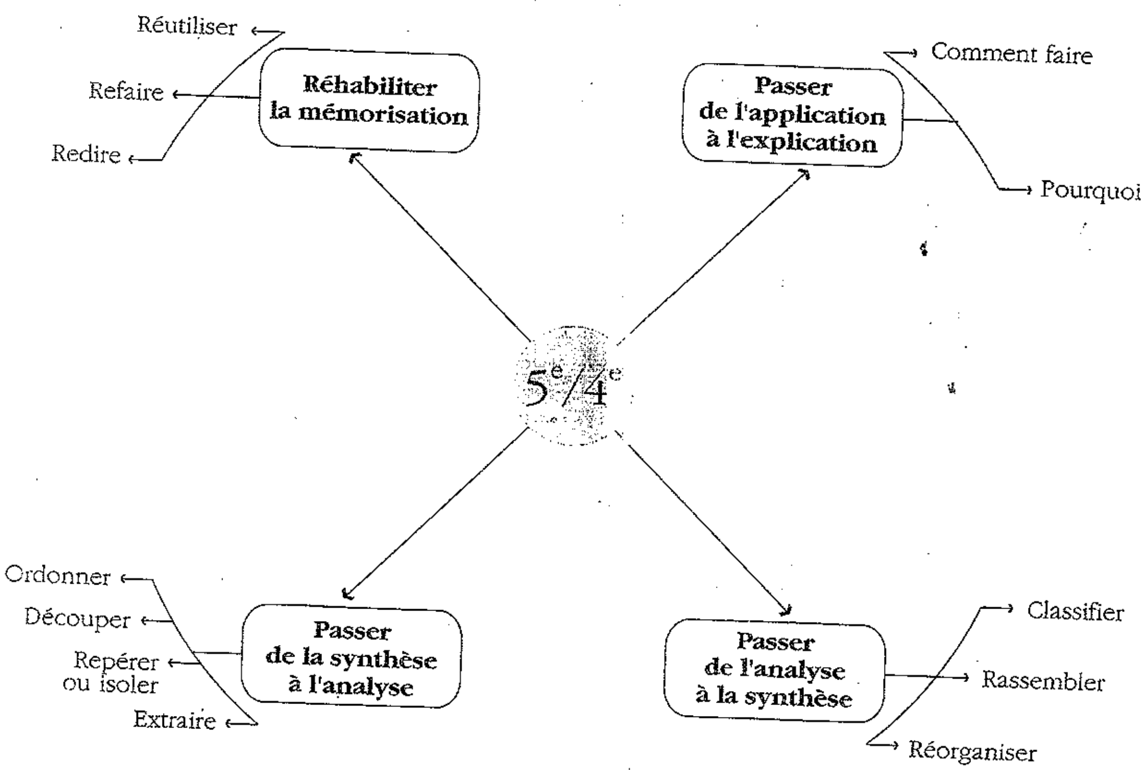
Le schéma suivant illustre les différentes étapes du déroulement de la réflexion.



Des obstacles se situent à tous les niveaux : évocation de l'énoncé, contrôle de ces évocations, tri des indices, traduction, confrontation, retour aux acquis mémorisés et tri, mise en relation avec les indices évoqués, puis résolution par le calcul.

La toute première difficulté surgit à la lecture de l'énoncé. Trop d'élèves se précipitent dans la résolution d'un problème avant même d'en avoir saisi tous les éléments. Ils sont envahis par le projet mental de «faire des opérations» et trient dans le texte ce qui va dans ce sens : les nombres, les fractions et les mots indicateurs d'opérations : partager, de plus, de moins, etc. Ils trient les indices qui vont dans le sens de cette intention dominante et négligent alors des mots importants. **Le problème qu'ils résolvent n'est pas le problème qui leur a été donné mais celui qu'ils ont évoqué**. Les quatre groupes décrits ci-dessus résolvent des problèmes différents parce qu'ils ont privilégié en évocation des éléments différents du texte.
Des difficultés de compréhension sont trop souvent diagnostiquées un peu hâtivement. Elles peuvent se situer en amont, au niveau de la préhension mentale (geste d'attention). Il se peut bien sûr que dans son geste de compréhension l'élève n'ait pas fait les bons liens (P3) ou encore que dans le retour évocatif à sa «bibliothèque mentale» il ne rencontre pas les acquis nécessaires.
Nous sommes là face à un autre type de difficultés très souvent rencontrées en mathématiques. Des élèves font le tri des indices pertinents, mais leur réflexion s'arrête en route pour la simple raison que leurs évoqués du problème ne rencontrent pas les évoqués mémorisés (culturels) correspondants. La réussite en mathématiques passe par la mise en place d'un projet de mémorisation ouvert. J'y reviendrai longuement dans les troisième et quatrième chapitres.

OBJECTIFS PRIORITAIRES EN 5^e ET 4^e



Dans la présentation des nouveaux programmes du cycle central du collège, il est dit : «On privilégiera l'activité de l'élève, sans négliger les temps de synthèse qui rythment les acquisitions communes. Les activités de formation, distinctes des travaux d'évaluation portant sur les compétences exigibles seront aussi riches et diversifiées que possible. Elles seront l'occasion de mobiliser et de consolider les acquis antérieurs dans une perspective élargie.»

5e et 4e sont effectivement deux classes charnières de l'apprentissage des mathématiques. C'est le moment de la constitution d'une culture mathématique de base. Le professeur de mathématiques doit être extrêmement vigilant s'il veut permettre à un grand nombre de ses élèves de **réussir à long terme**. Il est en effet frappant et choquant de constater que des élèves qui réussissent au collège échouent massivement à l'entrée au lycée. Tous ces lycéens en difficulté en mathématiques sont prisonniers d'une méthode de travail installée au collège. J'en ai interrogé des dizaines... les dialogues pédagogiques font régulièrement émerger trois déficiences :

- manque de travail de mémorisation du cours (la totalité du cours et pas uniquement les résultats);
- prédominance du projet d'application sur le projet d'explication (ce deuxième point est étroitement lié au précédent);
- manque de synthèse des acquis mathématiques.

Si des élèves de 2de ou 1re en sont là, c'est qu'il leur a manqué quelque chose au collège! C'est dès le début du collège qu'il faut entraîner les élèves dans des directions de mémorisation et de compréhension à long terme.

Le professeur de mathématiques peut, au cycle central du collège, mettre **l'accent méthodologique sur** :

1. *la réhabilitation de la mémorisation* : il convient d'apprendre pour **redire** par cœur, **refaire** les explications du professeur, **réutiliser** les stratégies en repérant les contextes et conditions de réutilisation. Sans une mémorisation de qualité il ne peut y avoir de réflexion mathématique. C'est ce qui sera développé dans la troisième partie;

2. *le passage de la compréhension application à la compréhension-explication* : les élèves doivent apprendre comment faire, mais être aussi capables de dire pourquoi ils le font. J'y reviendrai dans la deuxième partie;

3. *le passage de la synthèse à l'analyse* : en géométrie en particulier, l'élève doit apprendre à découper un tout, à extraire un élément d'un ensemble, à repérer ou à isoler certains éléments, à ordonner les éléments d'un énoncé;

4. *le passage de l'analyse à la synthèse* : les collégiens n'ont pas le réflexe de rassembler des acquis, de les clarifier et les réorganiser dans cette «perspective élargie» dont parlent les textes officiels. Ils ne le feront pas tout seuls. C'est au professeur de mathématiques de mettre en place dans ses cours une méthodologie de la synthèse. C'est ceci que je développerai dans la quatrième partie.

Les exemples développés dans cet ouvrage portent essentiellement sur quatre points mis en exergue dans la présentation des nouveaux programmes officiels :

- l'apprentissage progressif de la démonstration,
- la maîtrise des calculs sur les nombres relatifs,
- l'initiation au calcul littéral (priorités opératoires),
- la résolution d'une équation et la mise en équation d'un problème.

Leur mise en fiches tient compte de ces soucis officiellement exprimés :

- «bien équilibrer les apprentissages sur les deux années,
- en souligner la continuité et la cohérence,
- dégager clairement les points forts de chaque année».

À ces choix, plusieurs raisons :

- Ces thèmes sont le lieu d'observations de difficultés récurrentes : les élèves y font, d'année en année, toujours les mêmes erreurs, et y éprouvent les mêmes malaises.
- Ce sont des points des programmes qui préoccupent tous les enseignants du collège, beaucoup en modifient la présentation tous les ans et demeurent insatisfaits.
- Ce sont des apprentissages clés pour une réussite à plus long terme : les erreurs faites par les lycéens ont très souvent leur origine dans ces apprentissages de base.

Le tableau synoptique qui suit présente, pour chaque séquence :
– la classe concernée,
– les points des programmes qui y sont abordés,
– les éléments de Gestion mentale qui permettent de les éclairer.

Tableau synoptique : fiches pratiques

Séance	5^e^	4^e^	Thèmes mathématiques	Méthodologie en Gestion mentale	Pages
1. Découverte des évocations sur un mot concret	X	X		Découverte des évocations	22
2. Enrichissement des évocations : la médiatrice d'un segment	X	X	Médiatrice d'un segment	Évocations mathématiques	28
3. Enrichissement des évocations : les nombres	X	X	Nombres entiers, décimaux, fractionnaires, opposé d'un nombre	– Évocations spontanées / Évocations dirigées – L'attention	32
4. Le signe moins «–»	X	X	Nombres relatifs, somme et différence	Paramètres évocatifs, liens logiques P3, liens originaux P4, compréhension spatio-temporelle	44
5. Mise en équation d'un problème		X	Équations du 1er degré à une inconnue	Stratégie mentale. Sériation spatio-temporelle	52
6. Fiche de suivi mathématique	X	X	Tous (correction de devoirs)	Les projets de réflexion et de compréhension. Imaginaire d'avenir	56
7. Apprendre et utiliser un théorème	X		La médiatrice d'un segment, équidistance	Projet de mémorisation. De la synthèse à l'analyse	86
8. La démonstration		X	Apprentissage de la démonstration	Projet de réflexion (retour aux lois mathématiques)	90
9. Schéma heuristique et progression annuelle	X	X	Tous	L'activité mentale : analyse et synthèse. Projet de communication	106
10. Structure générale d'une activité de synthèse heuristique	X	X	Tous	Réorganiser et réactiver ses acquis. Mémorisation et compréhension	108
11. Synthèse et harmonisation des acquis : la médiatrice d'un segment	X	X	Médiatrice, concours des médiatrices d'un triangle	Évocations de la globalité d'un concept. Projet de mémorisation	110

Documents utilisables en cours

Thème	Pages
Médiatrice d'un segment	114-115 Encart couleur IV
Le signe moins « – »	Encart couleur VIII
Carte d'identité d'un théorème (vierge)	70
Cartes d'identité de théorèmes (complétées)	77 à 80
Cartes simplifiées : – triangle rectangle – droite des milieux – droite des milieux – demi-équilatéral – Pythagore	 81 82 83 84 85
La démonstration en 5^e	96
Puissances	Encart couleur V
« $-x$ »	Encart couleur VI
Factoriser	121
Produits remarquables	122
Inverse	Encart couleur VII

FICHE D'ACTIVITÉ 1

DÉCOUVERTE DES ÉVOCATIONS

Finalité communiquée aux élèves
Cette séquence vise à entraîner les élèves à aller à la découverte du «comment ça marche dans sa tête» quand on fait des mathématiques.

Il y a un intérêt double à cette démarche :
– pour les élèves, il s'agit d'apprendre à se connaître ;
– pour le professeur, il s'agit de puiser des indices pour mieux aider les élèves en leur donnant des conseils correspondant à ce dont ils ont besoin.

Objectifs pédagogiques

Rendre l'élève :
• acteur,
• autonome,
et lui en donner les moyens.

DESCRIPTION DE LA SÉQUENCE

1 Première phase

• Le professeur donne lentement la consigne suivante en ménageant de courtes pauses :
«Je vais vous dire un mot ; vous allez observer ce qui se passe dans votre tête ; ceux qui le voudront nous diront ensuite comment cela s'est passé. Vous êtes prêts?
Si je vous dis : **Perroquet**.

2 Deuxième phase

• Le professeur interroge :
«Qui veut nous dire comment cela s'est passé?»
Il reprend les réponses des élèves, les reformule, renvoie la réponse d'un élève sur toute la classe :
«Qui a fait comme...»
Il amène celui qui répond à préciser son évocation pour mettre en évidence des différences, même de détail.
«Qui a fait autre chose?»
Ce dialogue peut ne durer que quelques minutes.

• Interroger ensuite les élèves pour savoir si certains avaient déjà pu observer leurs évocations en situation scolaire ou non scolaire : sport, loisirs, lecture, rédaction...
Insister sur la très grande diversité des évocations.
Montrer par l'intérêt porté à chacun qu'il n'y a pas de jugement formulé sur ce qui est dit.
Une évocation n'est pas mieux qu'une autre, elle EST!

SUR UN MOT CONCRET $5^e/4^e$

Il est important que l'enseignant finalise cette séquence méthodologique pour qu'elle ne soit pas vécue comme déconnectée du programme de mathématiques. L'enseignant montre à ses élèves qu'il ne sort pas de son rôle « d'enseignant-entraîneur » de mathématiques.

Objectifs méthodologiques

- **Découvrir les évocations spontanées.**
- **Enrichir ses évocations. Se diriger de l'intérieur.**
- **Apprendre à maîtriser son activité mentale pour faire des mathématiques.**

COMMENTAIRES

Mise en projet d'instrospection cognitive 1

Pour que les élèves acceptent de jouer le jeu, il faut qu'ils aient saisi l'intérêt de la découverte de leur fonctionnement mental pour mieux l'organiser dans l'activité mathématique. Il faut donc que l'introduction de la séquence soit explicitée dans ses objectifs comme dans son déroulement.

Dialogue pédagogique 2

Il s'agit de faire émerger les évocations *visuelles*, *auditives* et *verbales* dans les différents paramètres, de mettre en évidence la très grande diversité des productions mentales et la possibilité qu'a chacun de se donner d'autres évocations que celles qui ont surgi spontanément. Chacun fait l'expérience de son pouvoir mental.

Faire exprimer le ressenti de la classe sur ce qui vient de se passer :
intérêt?...
surprise?...
et sur d'autres vécus similaires.
Il se peut que certains élèves aient déjà travaillé dans ce sens avec d'autres enseignants; la question peut d'ailleurs être posée en tout début de séquence.

3 Troisième phase

- Le professeur reprend toutes les réponses de la classe et les organise par thèmes au tableau.
- Le schéma ci-contre n'est qu'un exemple (*non transposable*). Il est important que les mots qui y seront écrits soient aussi fidèles que possible par rapport au vécu de la classe. Chaque élève doit pouvoir s'y reconnaître et retrouver ce qu'il a exprimé.
- Le professeur écrit sous la dictée des élèves. Ceux-ci sont encouragés à recopier cette fiche, à la personnaliser (surlignage) et à la compléter s'ils le souhaitent. Ce temps pris par chacun est un moment d'ancrage de ses découvertes personnelles. Il permet aussi aux élèves qui n'ont pas pu le faire précédemment de faire un retour sur leur propre production mentale, de la comparer à celle des autres, et donc de se familiariser progressivement avec cette auto-observation mentale.

Insister sur l'extraordinaire richesse mentale et sur la possibilité que chaque élève a de se diriger de l'intérieur.

- Le professeur peut aussi utiliser une grille d'observation distribuée aux élèves *avant* l'exercice en leur expliquant bien ce qu'ils auront à en faire à la suite du dialogue.

Utiliser une grille déjà préparée permet de gagner du temps et de lever les blocages liés à l'écriture.

4 Quatrième phase : prolongement

- Le professeur annonce :

« Nous allons maintenant recommencer l'expérience avec un mot mathématique. Qu'en pensez-vous?»

- Très souvent les élèves expriment que ce n'est pas pareil, que c'est plus difficile.

- On recommence l'expérience précédente. Si les élèves y ont fait une bonne prise de conscience de leurs évocations, le dialogue pédagogique peut être plus court que le précédent.

Faire exprimer le ressenti sur les différentes évocations entre **Perroquet** et **Médiatrice**.

Synthèse collective

J'ai entendu **Perroquet**	
Dans ma tête :	
J'ai vu	→ un perroquet en vrai, un porte-manteau…
	→ un dessin
	→ des couleurs
	→ un paysage
	→ le mot écrit
	→ …
J'ai entendu	→ un perroquet
	→ quelqu'un qui disait…
	→ …
Je me suis dit	→ perroquet
	→ bavardage
	→ c'est un animal qui répète sans comprendre
	→ j'ai épelé le mot
	→ …
J'ai ressenti	→ des couleurs
	→ de la chaleur
	→ de l'air au-dessus de ma tête
	→ …
J'ai fait autre chose…	

Exemple de grille d'observation pour cet exercice spécifique :

☐ J'ai vu	☐ un animal
	☐ des couleurs
	☐ le mot écrit
	☐ etc.
☐ J'ai entendu	☐ l'animal
	☐ le mot
	☐ etc.
☐ Je me suis dit	☐ le mot
	☐ etc.
☐ J'ai ressenti	☐ …
	☐ etc.
☐ J'ai fait autre chose…	

Évocation sur un mot mathématique

Il s'agit de se mettre en projet d'introspection sur un mot mathématique, tout en utilisant les découvertes précédentes sur un mot concret et de montrer la transversalité des stratégies.

Évocation sur le mot **Médiatrice** et dialogue pédagogique pour mettre en évidence différents niveaux d'abstraction dans les évoqués (voir la grille «paramètres» page 13). Des élèves expriment très souvent qu'il est plus difficile de se faire des images sur des mots mathématiques que sur des mots concrets. Il faut leur faire prendre conscience qu'ils peuvent y arriver mais qu'il y a «images concrètes» et «images abstraites» (sans leur parler de paramètres).

• La synthèse peut ici être orale, mais il semble intéressant que chaque élève fasse, sur une *grille d'observation* prévue à cet effet, une synthèse personnelle écrite pour ancrer, affiner ses découvertes.
Le document présenté ici peut être utilisé dans des dialogues sur plusieurs exercices. Il présente l'avantage de faire des comparaisons, souvent aussi, il éclaire l'élève (et l'enseignant) sur des habitudes nettement majoritaires.

• Le professeur amènera ensuite les élèves à comparer leurs découvertes dans les deux exercices et les similitudes ou différences d'évocation, et les mettra en projet d'enrichir leurs évocations, y compris sur des concepts mathématiques. Il insistera sur l'intérêt pour certains de la couleur et du mouvement dans les évocations pour leur donner vie. Pour cette comparaison, on peut utiliser un document unique pour les deux dialogues pédagogiques.

5 Cinquième phase

• Le professeur fait exprimer le ressenti de ses élèves sur la séquence :
«Que pensez-vous de ce que nous venons de faire?
Aviez-vous déjà remarqué que vous pouvez faire tout cela dans votre tête?»

6 Autre prolongement possible

• Proposer un exercice d'évocations dirigées sur la médiatrice d'un segment :
- image visuelle de la médiatrice d'un segment;
- faire tourner cette image;
- évocation des mouvements d'une construction imaginaire qui laisserait des traces visuelles ou lumineuses. Commentaire mental. Ajout de couleur... (voir fiche suivante).

Synthèse collective

GRILLE D'OBSERVATION DU DIALOGUE PÉDAGOGIQUE

	Exercices				
	1	2	3	4	5
J'ai vu dans ma tête :					
– des objets					
– des lieux					
– des personnes					
– des couleurs					
– des mots					
– des chiffres					
– des schémas					
– autre chose…					
J'ai entendu :					
– du bruit					
– un son					
– la voix de quelqu'un					
– ma voix					
– autre chose…					
Je me suis dit dans ma tête :					
– le mot					
– des commentaires					
– autre chose…					
J'ai ressenti :					
– des mouvements					
– des couleurs					
– des odeurs					
– des impressions					
– autre chose…					
J'ai fait autre chose…					

Synthèse générale 5

L'enseignant s'exprime aussi (et c'est très important) sur l'inscription de cette séquence dans un projet méthodologique plus global sur toute l'année : «Je vais essayer pendant toute cette année de vous aider à découvrir comment faire pour être plus attentif, pour mieux apprendre une leçon, réfléchir, comprendre, etc., pour faire des progrès en mathématiques. Des progrès sont à la portée de TOUS!»

Enrichissement des évocations 6

Chaque élève fait ce qu'il peut! Il ne doit pas se sentir obligé de produire une évocation déterminée. Il est simplement encouragé à **jouer avec ses évocations** et à aller dans des directions mentales qu'il n'avait pas expérimentées (ou observées). Il a à découvrir son pouvoir mental.

FICHE D'ACTIVITÉ 2

ENRICHISSEMENT DES ÉVOCATIONS :

Finalité communiquée aux élèves
Découvrir le fonctionnement de la pensée et mettre sa découverte au service de l'apprentissage des mathématiques.

«Se pencher sur le fonctionnement de cet ordinateur de bord qu'est le cerveau.»

Objectifs pédagogiques

- **Réactiver, réorganiser des connaissances.**
- **Acquérir une culture commune.**
- **Mobiliser des acquis antérieurs dans une perspective élargie.**
- **Faire surgir des acquis erronés.**
- **Ouvrir une remédiation.**

DÉROULEMENT DE LA SÉQUENCE

1 Première phase

• Le professeur demande à ses élèves de faire un retour sur la séquence précédemment décrite de découverte des évocations, et leur demande d'observer à nouveau leurs productions évocatives sur le mot «médiatrice».

• Mener un dialogue pédagogique pour apprécier la prise de conscience des élèves ainsi que l'impact de la séquence. On peut alors mesurer le chemin parcouru et faire évoquer la progression par les élèves eux-mêmes. C'est un temps d'ancrage de leurs précédentes découvertes.

• Faire dessiner par chaque élève sa représentation de la médiatrice d'un segment. Après avoir fait un tour rapide dans les rangs, l'enseignant ne peut en général que constater et faire remarquer aux élèves que leur très grande majorité a dessiné un segment horizontal et une médiatrice verticale.
• Demander aux élèves si c'est ce qu'ils ont évoqué (c'est évidemment le plus grand nombre) et leur proposer de jouer mentalement avec cette évocation après avoir dit quelques mots sur la limite de cette représentation à quantité de situations-problèmes.
• Le professeur accompagne ses élèves pour leur faire créer des évocations visuelles, sonores, verbales, dynamiques, lumineuses, vivantes... à partir de leurs évocations stéréotypées.

LA MÉDIATRICE D'UN SEGMENT 5e/4e

Le professeur peut proposer à la suite de la fiche 1 une séquence d'enrichissement des évocations sur la médiatrice d'un segment. Il va accompagner les élèves pour leur faire créer des évocations visuelles, sonores, verbales, dynamiques, lumineuses, mobiles... à partir de leurs évocations spontanées.

Objectifs méthodologiques

- **Travailler l'imaginaire d'avenir.**
- **Mettre des mots sur ses images visuelles.**
- **Enrichir ses évocations en géométrie.**

COMMENTAIRES

Faire créer de nouvelles évocations

Évocation de la séance précédente

Chaque séquence doit être inscrite dans une stratégie plus globale, pour éviter que les élèves ne vivent un travail méthodologique, aussi intéressant soit-il, comme une parenthèse dans un vécu annuel.

Dialogue pédagogique

Interroger les élèves sur leurs évocations d'une séquence méthodologique (ou didactique) permet à l'enseignant de rendre les élèves actifs, de mobiliser des contenus et d'ajuster une action ponctuelle en fonction des résurgences exprimées. C'est aussi ancrer des prises de conscience et enrichissement des évocations.

Chaque élève essaie d'aller plus loin que ce qu'il avait mentalement produit. Il suggère des évocations dynamiques, des mouvements d'une construction imaginaire qui laisserait des traces visuelles ou lumineuses... l'ajout de couleurs...

L'objectif de l'enseignant est de libérer l'imaginaire de ses élèves au service de la géométrie. Il peut aussi proposer l'inclusion de cette image visuelle de la médiatrice d'un segment dans l'image d'un triangle, d'utiliser son imaginaire pour construire les médiatrices des trois côtés du triangle (visuellement ou en se le disant et en ressenti).

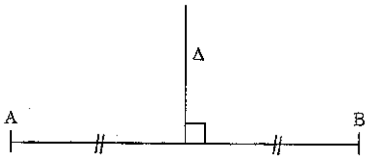
Tout ce travail est à faire uniquement en évocations, sans support perceptif des différents schémas, mais si un élève éprouve des difficultés, l'enseignant peut lui proposer le dessin, lui demander de le faire exister dans sa tête en le revoyant (même si ce n'est qu'en impression visuelle ou en impression ressentie de mouvement) ou en faisant une description mentale.

Chaque élève fait ce qu'il peut! Il ne doit pas se sentir obligé de produire une évocation déterminée. Il est simplement encouragé à jouer avec ses évocations et à aller dans des directions mentales qu'il n'avait pas expérimentées (ou observées...). Il a à découvrir son pouvoir mental.

L'enseignant doit, lors d'une telle séquence, insister sur l'importance d'avoir en tête le dessin ET les mots pour désigner, décrire et définir ce dessin. Il ne s'agit pas qu'un élève s'enferme dans un profil (visuel ou auditif), mais qu'il découvre la possibilité de compléter sa dominante pour devenir de plus en plus mixte.

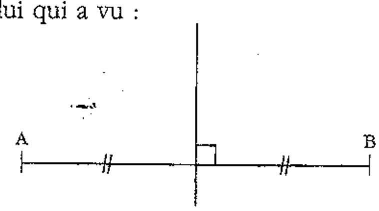
Émergence des représentations sur « médiatrice »

• Celui qui a eu dans sa tête :



imagine que la droite se prolonge... dans les deux sens.

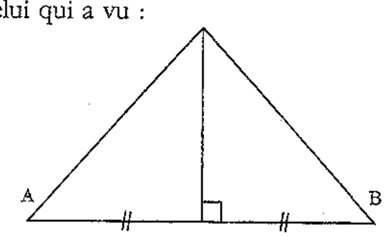
• Celui qui a vu :



essaie de faire tourner son image mentale dans l'espace.

• À chacun l'enseignant propose de réentendre ou de se dire mentalement la définition : «la médiatrice du segment [AB] est la droite perpendiculaire à (AB) qui passe par le milieu de [AB]». Il faut montrer aux élèves l'intérêt d'évoquer cette image dans tous les sens pour pouvoir la reconnaître dans une figure de géométrie.

• Celui qui a vu :

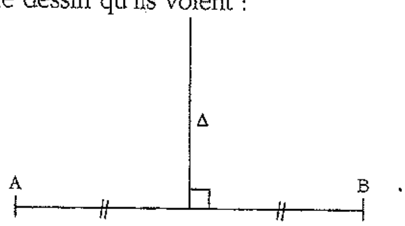


est encouragé à effacer mentalement le triangle pour ne conserver que le segment [AB] et la médiatrice (infinie).

2 Deuxième phase

• L'enseignant fait exprimer les élèves sur leurs découvertes et leur ressenti et conclut sur une *fiche de synthèse* dessinée au tableau ou distribuée à la classe et personnalisée par chacun.

• Il convient de montrer aux élèves la différence entre le dessin qu'ils voient :



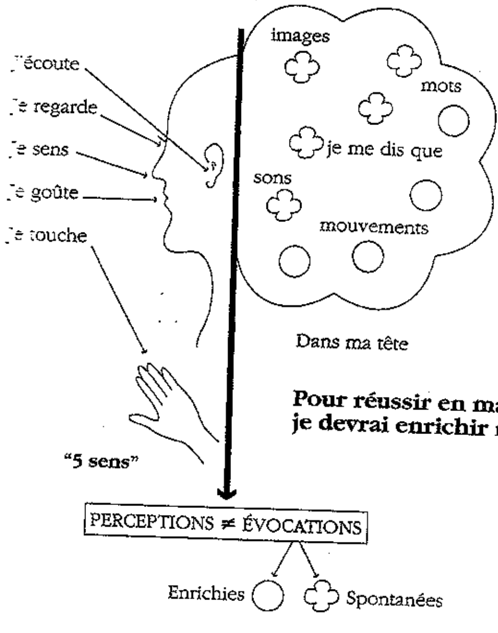
Perception

et le concept de **droite** Δ qui est un **ensemble infini de points** (sans début, ni fin), sans épaisseur et qui ne peut exister que dans la tête du mathématicien.

FICHE D'ACTIVITÉ 2

Synthèse méthodologique

2



Pour réussir en mathématiques, je devrai enrichir mes évocations.

Mise en évidence de la spécificité de l'évocation mathémétique

La droite mathématique est un modèle parfait.
On peut insister alors sur le rôle de modélisation des mathématiques.
L'élève devra se méfier de ce qu'il voit et prolonger ce perçu par une évocation beaucoup plus abstraite.

FICHE D'ACTIVITÉ 3

ENRICHISSEMENT DES ÉVOCATIONS :

Finalité communiquée aux élèves
Découvrir le fonctionnement de la pensée et mettre cette découverte au service de l'apprentissage des mathématiques.

Objectifs pédagogiques

- **Réactiver, réorganiser des connaissances.**
- **Acquérir une culture commune.**
- **Mobiliser des acquis antérieurs dans une perspective élargie.**
- **Faire surgir des acquis erronés.**
- **Ouvrir une remédiation.**

DÉROULEMENT DE LA SÉQUENCE

1 Première phase

• Le professeur demande à ses élèves de faire revenir ce qui avait été fait sur Perroquet/Médiatrice et leur fait exprimer ce qu'ils ont retenu de l'intérêt de ce genre d'exercice.

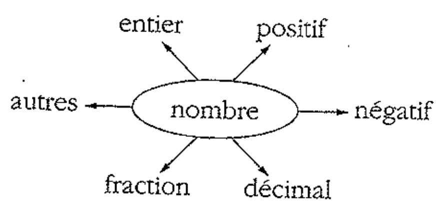
• Puis il suggère :
«Nous allons voir aujourd'hui s'il est possible de transférer en algèbre ce que nous avions fait sur Médiatrice et nous allons chercher comment le faire.»

• Dans ce but, l'enseignant invite à évoquer un nombre :
«Voulez-vous penser à un nombre? À quel nombre avez-vous pensé?»
• Chaque élève dit rapidement son choix.

• Le professeur questionne sur la forme des évocations pour savoir si ce nombre a été visualisé, en couleur ou pas, nettement ou pas, écrit à la main, s'il a été entendu, prononcé...

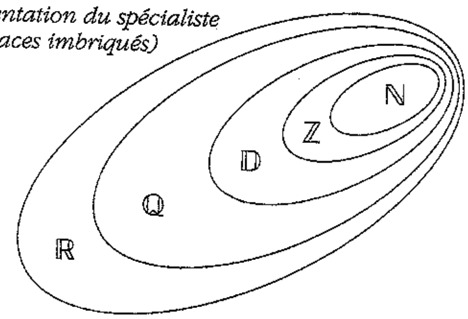
2 Deuxième phase

• La presque totalité (quelquefois la totalité) des élèves ont donné un **entier** (positif).
• Le professeur exprime sa surprise et fait réfléchir à tout ce qui aurait été possible. Il fait exprimer les élèves et note au tableau en heuristique tous les possibles :



• Ultérieurement, le professeur pourra justement utiliser cette structure étoilée pour faire réfléchir ses élèves sur les liens existant entre les différents éléments et les amener progressivement à la représentation en inclusions successives.

Représentation du spécialiste (en espaces imbriqués)



• Il demande à ses élèves de prendre le temps de se redire ou de revoir mentalement tout ce qui vient d'être fait.

LES NOMBRES

Enrichir ses évocations est une nécessité sur les objets géométriques, mais aussi dans les activités numériques. C'est le préalable indispensable au calcul littéral. Si une lettre cache un nombre, il est important que chaque élève ait conscience de tous les possibles de ce nombre. Il s'agit de passer de l'évocation spontanée d'un nombre particulier (entier) à celle d'un nombre en général.

Objectifs méthodologiques

- **Enrichir ses évocations en algèbre.**
- **Travailler l'imaginaire d'avenir.**

COMMENTAIRES

Évocation des séquences précédentes 1

Mobiliser les évocations des séquences précédentes permet de rentrer plus rapidement dans le vif du sujet et de rendre chacun plus actif. Il s'agit d'inscrire la séquence dans une logique méthodologique annuelle et de faire un pont entre l'activité mentale en géométrie et en algèbre.

Évocation d'un nombre
Élèves (et adultes) expriment majoritairement un nombre entier.

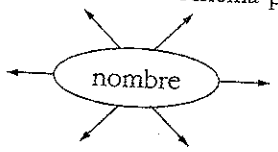
Court dialogue pédagogique
Pour faire décrire la forme des évocations sur les nombres.

Limite des évocations spontanées 2

Avertissement : le 1er schéma ne peut pas satisfaire le mathématicien car il ne correspond pas à la réalité mathématique, il **correspond à une nécessité mentale**. Ce n'est qu'un outil au service de l'élève : par sa *forme irradiante* c'est un outil d'aide à l'enrichissement des évocations.
C'est une étape indispensable entre une évocation spontanément pauvre et la représentation du concept mathématique de nombres telle que l'attend le spécialiste.

3 Troisième phase

• Le professeur propose :
«Je vais maintenant vous écrire quelque chose au tableau, observez ce que cela vous suggère.»
• Le professeur écrit : «x». Il fait exprimer les élèves et fait le lien avec la schéma précédent.



• Même travail que ci-dessus :
«Qu'est ce qui vous vient à l'esprit quand vous voyez écrit «$-x$»?»

4 Quatrième phase

• Le professeur invite chacun à reprendre mentalement (en images, en discours...) le déroulement de la séance sans aucun support de notes, et ce pendant quelques minutes.
Il peut interroger rapidement sur ce qui revient aux élèves, sur ce qui leur semble le plus important à retenir et sur la façon dont ils vont s'y prendre pour le faire.

5 Cinquième phase

• Faire exprimer les élèves sur leur ressenti et leur progression par rapport au début du cours.
• Faire le lien avec la séquence «Médiatrice» pour bien insister sur la nécessité de l'enrichissement des évocations en algèbre comme en géométrie pour aller au delà de ce qui est **vu** (ici le signe «$-$»)

Inviter à reprendre notes et fiches pour se mettre en projet de mémoriser ce que l'on a fait.
Cette séquence sera à reprendre ultérieurement en 4^{e} pour une synthèse des acquis *(voir fiche «$-x$», encart couleur VI)*

Évocation sur x et $-x$

Temps d'évocation de la séance
C'est un temps d'ancrage du nécessaire enrichissement des évocations sur les nombres et de mise en projet de mémorisation du schéma.

Évocation sur « x »
Ce symbole si souvent utilisé en mathématiques (trop souvent, se plaignent les professeurs de physique) n'évoque *rien* pour beaucoup trop d'élèves (tous ceux qui écrivent : $3x + 2 = 5x$!)

Évocation sur « $-x$ »
L'enseignant comprendra qu'il s'agit ici d'amener les élèves à corriger leur représentation de « $-x$ » car ils expriment spontanément que « $-x$ » est un nombre négatif, et c'est logique quand on sait que x est un nombre sur lequel la majorité des élèves évoquent un entier positif.

Temps d'évocation de toute la séance 4

Ce temps permet à chacun de réactiver et de s'approprier les découvertes précédentes, de réorganiser ses connaissances tout en se projetant dans un futur de réutilisation personnelle.

Synthèse 5

Le temps de synthèse est un temps privilégié de libre expression. Il permet à l'enseignant de « prendre la température » de la classe et d'abréger, d'ajuster, d'approfondir si la nécessité s'en fait sentir.

Mise en projet de mémorisation
Ce qui peut sembler évident à une classe en situation de cours n'est souvent plus disponible quelques semaines plus tard parce que les élèves n'ont pas mis ces évidences dans une dynamique de futur. Comprendre se situe *ici* et *maintenant*. Mémoriser c'est pour un *ailleurs* et un *plus tard*.

2 Les stratégies mentales de la compréhension

L'ITINÉRAIRE MENTAL DE LA COMPRÉHENSION

Exercice pour le lecteur

Revenons sur l'exercice du chapitre 1 : «l'avant-veille du lendemain d'aujourd'hui, c'est quel jour?» et décrivons plus précisément quelques itinéraires mentaux fréquemment décrits par les stagiaires en formation (ou par des élèves).

Stratégie A

La personne se raconte mentalement : «aujourd'hui, c'est aujourd'hui, le lendemain d'aujourd'hui c'est demain, la veille de demain c'est aujourd'hui, l'avant-veille de demain c'était hier». Elle évoque la **successivité** des éléments. Chaque conclusion produit l'effacement de tout le raisonnement qui précède. La personne «avance» dans son discours sans retour en arrière.

La personne fait des liens le plus souvent **verbaux**
(Paramètre **3**)

- sur des évocations d'événements concrets vécus ou à vivre (Paramètre **1**)
- sur les évocations des mots eux-mêmes (Paramètre **2**)

C'est la **succession** des conclusions qui procure le sens.

Stratégie B

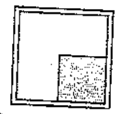
La personne visualise plus ou moins précisément des espaces. Elle évoque ces espaces dans la **simultanéité**.

avant-veille | lendemain

Ces deux espaces peuvent être

- concrets (Paramètre **1**)
  - la personne évoque visuellement des scènes de la vie de tous les jours qu'elle compare
- abstraits (Paramètre **2**)
  - évocation d'un schéma : avant-veille, lendemain, comparaison
  - évocation de chiffres : −2, 0, +1

C'est la simultanéité des espaces et leur comparaison qui procure le sens. Les deux espaces peuvent être juxtaposés comme ci-dessus ou imbriqués :



liens spatiaux

(Paramètre 3)

Peut-être vous êtes vous reconnu dans l'une de ces descriptions?... Si c'est le cas, vous avez sans doute une dominante très affirmée. Ce ne sont que deux exemples de stratégies décrites par des stagiaires en formation. Il en existe beaucoup d'autres plus ou moins mixtes.

Par exemple, une personne peut évoquer visuellement des espaces puis se parler ces images ou bien se faire des commentaires de la phrase et poser ses conclusions verbales successives sur un schéma ou encore se répéter la phrase plusieurs fois, telle qu'elle est écrite pour mieux en saisir le sens avant d'élaborer son raisonnement en images.

Comprendre un texte, c'est le **traduire** en évocations visuelles, auditives ou verbales dans un cadre spatio-temporel et créer entre les objets évoqués **des liens de comparaison**. De cette comparaison surgit l'étincelle de la compréhension. Cette étincelle n'est pas magique, elle est le fruit d'une activité évocative précise, observable et descriptible par l'apprenant pour peu qu'il soit accompagné dans son observation par l'enseignant. *Comprendre est un geste mental éducable* avec des structures précises d'accomplissement.

Pour **comprendre** les mathématiques, l'élève doit d'abord **prendre** mentalement les éléments qui lui sont donnés, c'est-à-dire les évoquer, et contrôler que tous ces éléments ont bien été saisis (ceux qui disent ne pas avoir compris sont souvent des élèves qui n'ont pas véritablement «pris» le sujet à comprendre dans sa totalité). L'élève doit ensuite se livrer à un travail de **traduction**, donc de transformation, en images visuelles concrètes ou abstraites et/ou en discours intérieur en référence avec sa culture mathématique, puis comparer ses images mentales pour que se déroule sa compréhension.

> *«La compréhension est le fruit d'un geste mental parfaitement bien défini par le projet de se donner, redonner en évocations répétées l'objet perçu dans le but de le saisir de mieux en mieux. C'est à la portée de tous.»*
>
> Antoine de La Garanderie, *Comprendre et imaginer*

LE CADRE DE LA COMPRÉHENSION ESPACE-TEMPS

Dans ses ouvrages, Antoine de La Garanderie a longuement décrit le cadre de déroulement de la compréhension :

> *«C'est seulement dans l'espace ou dans le temps qu'on découvre un "sens" aux choses ou aux êtres (...). C'est quelque chose, en effet, d'essentiel de savoir que certains sujets ne cadrent leur intuition du sens que dans le temps et d'autres que dans l'espace.»*
>
> Antoine de La Garanderie, *Comprendre et imaginer*

Je dois à France Pagès de m'avoir alertée sur les immenses conséquences pédagogiques de cet aspect spatio-temporel de la compréhension. Elle m'a permis d'élucider des difficultés d'apprentissage que j'avais seulement entrevues. France Pagès présente en effet un travail passionnant d'analyse des «incontournables» dans les stratégies de compréhension de la lecture, de la grammaire, des mathématiques... Dans son sillage, j'ai été amenée à approfondir une recherche à peine ébauchée sur l'analyse des difficultés de compréhension des mathématiques au collège. Tout le travail qui va suivre est inspiré de nos échanges et de nos interrogations. Qu'elle en soit ici remerciée.

Il faut avoir vécu beaucoup de dialogues pédagogiques pour pénétrer la complexité des mécanismes mentaux de compréhension. Ces dialogues sont le passage obligé si on veut analyser les difficultés de compréhension en mathématiques.

A_____ Exercice pour le lecteur

Pour essayer de mieux cerner le propos : savez-vous dans quel cadre vous placez prioritairement vos évoqués de compréhension? Observez, par exemple, comment vous donnez sens mentalement à l'expression suivante :

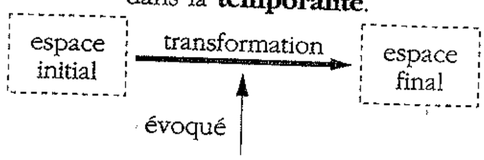
«LE CHEVAL GALOPE»

Voici la description de deux stratégies spécifiques :

Stratégie A

Le sujet entend le galop, le rythme ou ressent les mouvements rythmés. Il exprime souvent un prolongement de ces évocations dans des impressions visuelles. Il peut quelquefois dire qu'il ne «voit» rien tant ses *images visuelles* sont fugitives, imprécises, *implicites.* Il vit mentalement la prégnance de la **successivité** des mouvements du cheval.

«Le Cheval galope» est évoqué dans la **temporalité**.

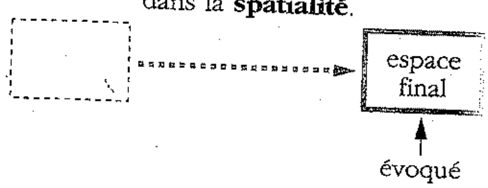


L'auditif privilégie la transformation, **le temps**, l'état initial E_i et l'état final E_f restant plus ou moins implicites.

Stratégie B

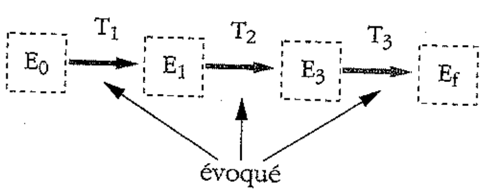
Le sujet dit : «Je vois le cheval qui galope.» Encouragé à préciser ce qu'il voit, il décrit *une* image arrêtée d'un cheval en extension décollé du sol. Cette image unique dynamique, qui peut être très concrète ou comme une image de bande dessinée, porte *l'implicite des mouvements,* à la fois ceux qui précèdent et ceux qui vont suivre. Si c'est une image dessinée (BD), elle porte parfois de petits traits pour signifier le mouvement des pattes. Cette image mentale globale présente, en **simultanéité**, tous les indices du galop.

«Le Cheval galope» est évoqué dans la **spatialité**.

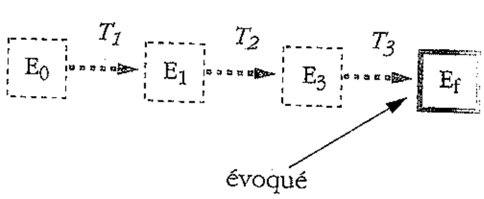


Le visuel privilégie les états ou **espaces** (parfois même uniquement l'état final) en laissant plus ou moins la transformation et l'état initial en implicite.

Ce schéma simplifié de deux espaces et d'une transformation peut être évidemment, dans l'exemple «Le cheval galope», comme dans la majorité des exercices de compréhension, prolongé par une succession d'états intermédiaires et de transformations successives.



L'auditif privilégie les transformations, c'est-à-dire le déroulement temporel : **Temps**



Le visuel privilégie les états ou positionnements : **Espaces**

Il a parfois du mal à faire un «arrêt sur image». Il peut se perdre dans les dédales des transformations successives sans se poser... Il ne sait plus où il en est et a du mal à revenir en arrière dans son itinéraire mental.
Il peut avoir du mal à globaliser.

Il a parfois du mal à gérer la successivité des transformations et à découper finement les différentes étapes de ces transformations successives. La globalité s'impose à lui comme un tout insécable dans laquelle il peut s'empêtrer.
Il ne sait pas toujours par où commencer.

Bien sûr les deux cas exposés sont deux cas extrêmes entre lesquels il faudrait glisser une multitude de stratégies plus ou moins mixtes. De nombreux sujets performants arrivent très bien à compléter leur stratégie dominante temporelle ou spatiale par la stratégie complémentaire lorsqu'ils en ont besoin.
Le professeur de mathématiques doit avoir en mémoire en permanence ce schéma de compréhension mentale spatio-temporelle. Il lui permet de déboucher sur une analyse de la situation pédagogique qui tient compte de la structure épistémologique des objets mathématiques, plutôt linéaire ou plutôt spatiale, et de créer des séquences didactiques, ainsi que des outils, qui tiennent compte de tous ces éléments.

B — Exemple de conséquences pédagogiques

En calcul algébrique, pour faire appliquer les priorités opératoires, l'enseignant propose traditionnellement une stratégie temporelle, linéaire, qu'il verbalise : *d'abord* les puissances, *ensuite* les multiplications, *après* les additions/soustractions.

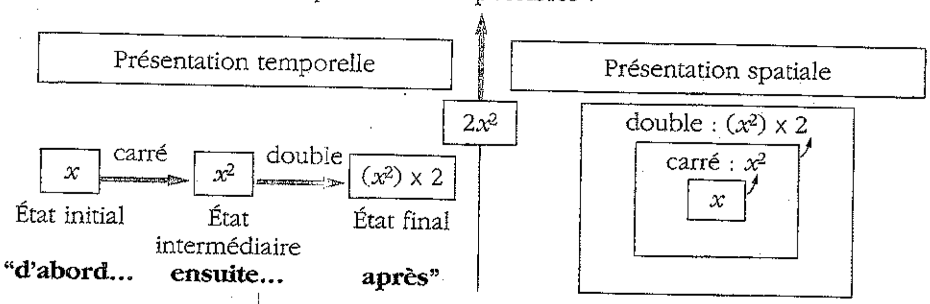
Ce codage temporel est relativement aisé pour des élèves à dominante auditive ; il va dans le sens de leur compréhension spontanément temporelle. Il peut être plus difficile pour un certain nombre de «visuels». En effet, ceux-ci ont besoin pour comprendre de réaliser un ordre spatial. La présentation chronologique de l'enseignant ne va pas dans leur sens. Certains s'y adaptent, d'autres non. Pourquoi ne pas essayer de les aider en spatialisant ces liens de chronologie et en les présentant en inclusions successives.

Voici un exemple de présentation possible pour : $2x^2$ et $(2x)^2$. Si on étudie ces deux concepts, on remarque que dans $2x^2$ les calculs sont à faire exactement dans l'ordre inverse de celui où ils sont écrits et où ils sont parlés : «le double du carré de x».
② ①

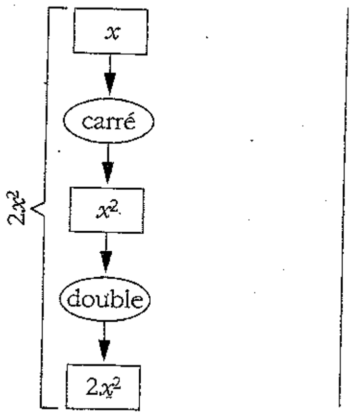
Tandis que dans $(2\,x)^2$ les calculs sont à faire dans l'ordre où ils sont écrits, mais dans l'ordre inverse de celui où ils sont parlés : «le carré du double de x».
② ①

Il y a de quoi s'y perdre !
Dans les expressions «double du carré de x» ou «carré du double de x», «du» et «de» parlent des liens d'inclusion. Alors pourquoi ne pas mettre la forme de la présentation au service de ces inclusions successives en les spatialisant.

Voici donc deux formes de présentations possibles :

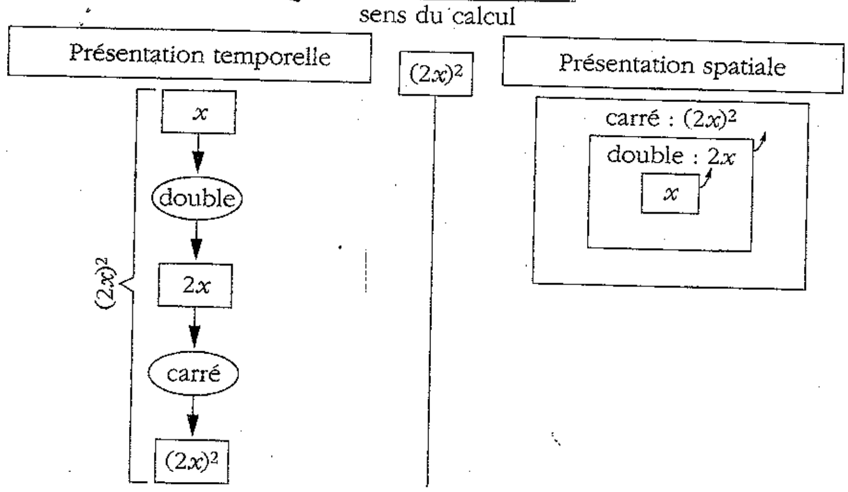


Et pourquoi pas à la verticale (elle est souvent mieux gérée par les élèves à dominante évocative visuelle)



le double du carré de x

sens du calcul



le carré du double de x

sens du calcul

La confusion des deux calculs peut très bien être le résultat d'itinéraires mentaux différents. Elle peut être le fait d'un élève globalisant qui comprend les objets mathématiques dans la simultanéité aussi bien que d'un élève à codage plutôt linéaire.
Le premier a des difficultés à rentrer dans cette chronologie du calcul algébrique et ne voit pas forcément la différence entre les deux expressions : il place le «double» et le «carré» au même niveau sans priorité de l'un à l'autre, il les gère en simultané et dans ses calculs peut faire tantôt l'un, tantôt l'autre. Le deuxième peut être tenté d'effectuer les calculs dans l'ordre où ils sont nommés (écrits) dans la phrase $2x^2$:
J'entends d'abord (ou je vois) 2 → je double x
J'entends ensuite (ou je vois) «carré» → j'élève au carré

Sa dominante mentale linéaire peut le faire réagir à la linéarité de l'écriture. Le concept $2x^2$ est aussi de structure linéaire, mais il est à prendre dans l'ordre inverse de la «phrase mathématique» ainsi écrite.

L'obstacle majeur à la compréhension de ces deux concepts est la non-prise en compte mentale des liens d'inclusion (P3) des objets mathématiques. L'illustration de ces inclusions successives par le schéma précédent peut être éclairante pour certains élèves.

Son aspect spatial
met en évidence
la **globalité** du résultat.

Les espaces imbriqués
mettent en évidence
l'inclusion des éléments
donc la **temporalité** des opérations.

Dans une matière où pèse la linéarité, des schémas comme ceux présentés ci-avant permettent de spatialiser la temporalité.

L'apprentissage du calcul algébrique peut être facilité
par des ***représentations spatiales*** *à tous les niveaux de la scolarité.*

La Gestion mentale permet à l'enseignant de porter un autre regard sur sa pratique pédagogique et redécouvrir sa matière d'enseignement. Il doit alors par souci de cohérence revoir la forme de ses outils didactiques pour tenir compte de la structure du concept mathématique et de l'activité mentale qu'il peut induire dans la tête de l'élève.

APPLIQUER ET EXPLIQUER : DEUX PROJETS MENTAUX

Lorsqu'on demande à des élèves de 4[e] ce qu'est pour eux «Comprendre les Maths», ils répondent de façon quasi unanime : «Savoir faire un exercice.» Si on les interroge un peu plus précisément : «Comment savez-vous que vous avez compris un exercice», ils répondent tout aussi unanimement : «Si je sais le refaire.»

Si on les accompagne dans la résolution d'un exercice, en particulier en algèbre, on observe effectivement qu'ils savent faire. Demandons-leur *pourquoi* ils le font : ils restent sans réponse ou alors ils se justifient en disant : «**J'ai le droit** de le faire.»

Ils ont par exemple acquis la technique de simplification dans un produit de fractions :

$$A = -\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{9}\,③}{\cancel{4}\,②} = -\frac{3}{2}$$

mais ne savent plus ce que signifie cette technique ou alors ils expliquent : «J'ai le droit de barrer si j'ai le même nombre en haut et en bas.» Il ne faut pas alors s'étonner qu'ils procèdent de la même manière pour calculer :

$$B = -\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{9}\,③}{\cancel{4}\,②}$$

En correction de l'exercice ils vont dire : «C'est une étourderie, je n'ai pas fait attention.» L'excuse est un peu rapide. Les nombreux dialogues pédagogiques que j'ai pu mener me permettent d'affirmer que ces élèves ont développé en mathématiques un unique projet d'application, sans que celle-ci soit sous-tendue par une quelconque justification théorique.
S'ils savent comment faire, il n'est pas fréquent qu'ils sachent pourquoi ils le font.

Appliquer et expliquer sont deux projets de compréhension
différents *mais* ***complémentaires***.

Des collégiens peuvent très bien être performants en algèbre en ayant développé un projet excessivement appliquant. Ils risquent d'éprouver de grosses difficultés dès la classe de 2[nde]. L'enseignant doit en tenir compte dans sa pratique et de les amener systématiquement à évoquer aussi l'explication du «Pourquoi» de ce qu'ils font.

Le professeur de mathématiques devra régulièrement interroger ses élèves sur ce «Pourquoi». Il devra être très clair sur ses exigences : le cours est à apprendre! Apprendre un cours de mathématiques c'est aussi être capable d'en refaire le cheminement **explicatif**. Il pourra dans son cours mettre en évidence un aspect explicatif dans les lois qu'il est amené à énoncer pour que ses élèves prennent l'habitude de développer les projets mentaux de compréhension : **appliquer et expliquer.**

Cette modification de l'attitude intérieure ne peut aller sans la mise en place d'un projet de mémorisation ouvert. Si on interroge des lycéens en difficulté en mathématiques sur la façon dont ils travaillent, ils font état de répétition d'exercices. Ceux qui apprennent le cours (ils ne sont pas nombreux) n'attachent d'importance qu'aux théorèmes, lois, formules, c'est-à-dire aux résultats du cours. Rares sont ceux qui font un retour sur le cheminement explicatif de l'enseignant. S'ils le font, c'est dans un projet de comprendre, pas d'apprendre.

Les élèves de collège ne mettent pas spontanément en place un projet de mémorisation, ils ne le font que lorsqu'ils «tombent» sur un enseignant qui donne des «interrogations de leçon». Si l'enseignant n'interroge pas sur le cours, force est de constater qu'ils ne l'apprennent pas. Or, on ne comprend pas à partir de «rien». Comprendre les mathématiques est un geste évocatif qui se déploie sur une culture mathématique personnelle. Si les acquis se limitent à des savoir-faire, il ne faut pas s'étonner que la compréhension ne soit qu'appliquante. Aidons les élèves à modifier leur culture mathématique et nous pourrons espérer élargir leur projet de compréhension. Cela suppose que la mémorisation retrouve dans l'apprentissage des mathématiques la place qu'elle n'aurait jamais dû perdre. Il est important que tous les enseignants de collège et de lycée se mobilisent pour réhabiliter une mémorisation élargie au service de la compréhension. Nos élèves ne le feront pas tout seuls!

Comprendre et apprendre ne sont pas à opposer. Ce sont deux gestes mentaux complémentaires, l'un au service de l'autre.

Finalités communiquées aux élèves
Compte tenu du fait que les élèves viennent de classes différentes où enseignent des professeurs différents, il s'agit de se mettre d'accord sur des choses apprises en 5^e^ et d'harmoniser des méthodes de calcul qui serviront toute l'année en 4^e^.

Objectifs pédagogiques

- **Se donner une culture commune.**
- **Faire émerger de fausses représentations.**
- **Remédier si nécessaire.**
- **Donner du sens à des automatismes de calcul.**
- **Mobiliser et consolider des acquis antérieurs.**

DÉROULEMENT DE LA SÉQUENCE

1 Première séance

• Le professeur pose le signe «–» au centre du tableau et demande aux élèves d'évoquer toutes les situations où ils ont rencontré ce signe. Les élèves trouvent rapidement :

une soustraction	le signe d'un nombre
$7-3$	-3

• L'enseignant commence le schéma heuristique ci-contre et le complètera au fil de la séquence.

• L'enseignant suggère : «Essayez de trouver des situations de la vie courante qui pourraient éclairer ces deux exemples.»
• Les élèves expriment ce qu'ils ont vu mentalement ou ce qu'ils se sont dit...

• Le professeur dirige ensuite le questionnement pour obtenir des précisions sur la nature de ces évocations et arriver à la prise de conscience que les deux exemples sont de nature différente.
Dans la vie de tous les jours :

le 1^er^ correspond à une	le 2^e^ correspond à une
ACTION = déroulement dans le temps.	POSITION (espace) = l'image visuelle est statique :
Cette action a été souvent évoquée visuellement en mouvement ou en ressenti de mouvement.	– bouton de l'ascenseur – graduation du thermomètre *C'est une position **relative** à zéro.*

• Le professeur synthétise ces découvertes en posant au tableau les mots «action» et «position» sur les branches du schéma (voir ci-contre).

• Les élèves sont encouragés à revoir mentalement le tableau (de préférence tableau fermé), à réentendre ce qui a été dit, à le redire,...

On peut ensuite faire s'exprimer un ou deux élèves.

Cette séquence est mise en forme pour le début de la classe de 4^e. Elle est à découper en plusieurs séances. La première vise l'ancrage de la compréhension de l'addition et de la soustraction des relatifs, la seconde propose une remédiation si cela est nécessaire et la troisième un prolongement dans le rôle des parenthèses dans les sommes algébriques. Elle peut facilement être modifiée pour la classe de 5^e au moment d'aborder la soustraction des relatifs.

Objectifs méthodologiques

- **Enrichir ses évocations dans les différents paramètres.**
- **Élargir la compréhension spatio-temporelle d'un concept mathématique.**
- **Développer ses projets de compréhension.**
- **Appliquer et expliquer.**
- **S'entraîner à faire la synthèse.**

COMMENTAIRES

Le signe «–»

Il s'agit là de faire appel aux acquis.
Remarque : la soustraction des relatifs surgit rarement spontanément.

7 – 3

– 3

Sollicitation d'évocations de situations concrètes (**P1**). Pour illustrer les 2 exemples donnés et mini-dialogue pédagogique.

Recherche de liens logiques spatio-temporels (P3)

Action Position

7 – 3 – 3

une action se déroule dans le *temps*
une position se situe dans l'*espace*

C'est un temps d'évocation des différences d'utilisation d'un même symbole.

FICHE D'ACTIVITÉ 4

• Interroger :
«Avez-vous en tête d'autres types de soustraction?»
On donne (ils donnent) :
Question : quel est le sens de ces 2 signes? **7 – (– 3)**

Réponse : **action** **position**

Question : qui sait faire ce calcul?
2 réponses sont généralement données :

7 + (+3) 7 + 3

• Demander alors :
«Pouvez-vous me dire **pourquoi** vous faites ça?»
Le professeur écrit au tableau les réponses des élèves.

• Le professeur interroge :
«Pourriez-vous imaginer une situation concrète pour illustrer ce calcul 7 – (– 3)?»
L'objectif est de déboucher sur une métaphore qui conserve le sens temporel de la soustraction et le sens spatial du nombre relatif.

• Il accueille les réponses et effectue un tri.

• Indiquer aux élèves :
«Je vous laisse quelques instants pour revoir, vous redire... dans votre tête... tout ce qui vient d'être fait...»

• Chaque élève est encouragé, d'une part à se déterminer dans le choix de l'une des deux explications, et d'autre part à conserver en réserve l'explication complémentaire.

• Le professeur indique :
«Chaque fois que vous ferez ce genre de calcul, je pourrai vous demander de m'expliquer **pourquoi** vous le faites.»

Pour aller plus avant, l'enseignant expose :
«Je vais vous proposer un exercice de calcul algébrique dans lequel vous aurez à utiliser ce que nous venons de faire.»

Élargissement aux concepts mathématiques
(sollicitation des paramètres **2** et **3**)

On se trouve là dans un cas d'élargissement du projet de compréhension : passer de l'application à l'explication.

Très peu d'élèves savent exprimer autre chose qu'une recette d'application. Par exemple : «Quand j'ai deux «–», ça fait «+».
Il se peut que l'un ou l'autre fasse référence à la loi a – b = a + opposé de b.

Appel au concret
La métaphore est intéressante en mathématiques, car elle permet de solliciter des liens originaux (P**4**) sur des évoqués concrets (P**1**) dans une matière qui habituellement mobilise essentiellement des liens logiques (P**3**) sur des évoqués de codes P**2**.

Métaphore proposée

opération: «–» j'enlève, «+» j'ajoute

nombre relatif: – punition, + cadeau

7 – (– 3) ⟶ 7 + 3 *2 cadeaux*
J'enlève une punition ⟶ cadeau *s'ajoutent*

7 – (+ 3) ⟶ 7 – 3 *on fait*
J'enlève un cadeau ⟶ punition *la différence. le plus grand l'emporte*

Le schéma précédemment ébauché est complété au tableau. Faire remarquer que les signes à droite ne parlent plus que de positions.

Réserver ensuite un temps d'évocation de tout ce qui vient d'être fait. C'est un temps d'appropriation et d'ancrage des explications précédentes.

Inviter les enfants à se mettre en projet d'évocation de l'explication qui sous-tend l'application.

Explications mentales
logiques P**3** ou originales P**4**

avec en appui
l'évocation de la loi mathématique P**2** — l'évocation du concret P**1**

Susciter l'imaginaire d'avenir : mise en projet d'explication pour compléter le savoir-faire.

Mise en projet de réutilisation des connaissances précédentes et transfert dans une somme algébrique plus complexe.

Calculer A = (+ 6) + (– 8) – (+4) – (– 5) + (– 3) – (– 2)
Il faudra insister sur le fait que dans l'écriture simplifiée ne subsistent plus que des signes de **position**, et qu'en 4ᵉ ce sera toujours cette écriture qui sera conservée.
Faire terminer le calcul et corriger.

• Faire évoquer, puis exprimer la progression dans la compréhension par rapport au début du cours (même si cette compréhension n'est pas définitive) et donc le sentiment de la compétence acquise.

• Le professeur dessine la 3ᵉ branche du schéma en disant qu'une autre utilisation du signe «–» sera vue ultérieurement et que cette fiche sera alors reprise et complétée.
• Donner aux élèves du temps pour recopier la fiche faite au tableau ou en distribuer des photocopies à compléter et personnaliser (cette fiche est rangée dans le dossier mathématique, voir ci-contre, et en encart couleur p. VIII).

• Prévenir que cette fiche est à apprendre pour :

la redire	l'appliquer dans des calculs	expliquer à quelqu'un la signification de chaque signe dans un calcul et le pourquoi des calculs

2 Deuxième séance

• À la suite d'une interrogation, les élèves sont accompagnés dans le repérage de leurs erreurs : «Où sont mes erreurs?» «Quelle en est l'origine?»

• Le professeur note au tableau toutes les erreurs (de façon anonyme) et demande à toute la classe de rentrer dans une démarche d'analyse de l'erreur.

• Demander :
«Que s'est-il passé dans ces deux cas?»

Le «– 4» et le «+ 4» ont été gérés en action (temps) alors qu'ils étaient indicateurs de position.

• Interroger l'élève qui a fait l'erreur et lui demander ce qui justifie ce «+».
L'élève exprime : deux «–» donnent un «+».

• Lui montrer que ce n'est pas toujours faux : – (– 4) = + 4, mais que là c'est inadapté : lui faire prendre conscience qu'il a appliqué une recette, mais pas la bonne.

• Les élèves qui ont fait une erreur sont encouragés :

à revoir mentalement la fiche	à se redonner la règle	à se redire la métaphore

Ce temps doit être pris pour chaque erreur.